

PROGRAMA DE L'ASSIGNATURA:

"ESTADÍSTICA MATEMÀTICA" - 4rt. curs de Matemàtiques

Professor: ANTONI SINTES

I. MODELS ESTADÍSTICS

Models estadístics. Exemples: mostreig d'inspecció, un model de mesurament. Models i dades. Paràmetres. Parametritzacions identificables i inidentificables. Models paramètrics i no paramètrics. Models regulars. Els problemes de la Estadística: estimació i tests. Estadístiques.

Suficiència. El problema de la reducció de dades. Estadístiques suficients per a un paràmetre. Exemples. Teorema de factorització de Neyman-Fisher. Exemples: estimació del paràmetre d'un procés de Poisson. Estimació del tamany d'una població finita. Poblacions normals:

Famílies exponencials. El problema de la existència de estadístiques suficients amb dimensió independent del tamany mostral. Famílies exponencials uniparamètriques. Estadístiques suficients naturals. Exemples: famílies normals, famílies binomials. La família de distribucions de l'estadística suficient natural és una família exponencial. Famílies exponencials uniparamètriques en forma natural, reparametritzacions. La funció generatriu dels moments de l'estadística suficient natural. Famílies exponencials K-paramètriques. Exemples: les famílies normals.

Models Bayesianes. Exemples. Elements bàsics dels models Bayesianes: distribució a priori i distribució a posteriori. Regla de Bayes pel càlcul de la posterior. Exemples: experiments binomials. Famílies conjugades. Famílies conjugades en models exponencials K-paramètrics. Exemples: distribucions normals.

II. MÈTODES D'ESTIMACIÓ

Principis de substitució. El principi de substitució de freqüències
Dependència de paràmetres. Exemples: les proporcions de Hardy-Weinberg.
El principi de substitució de la funció de distribució empírica.
Exemples: quantils empírics. El mètode dels moments. Exemples: famílies
normals i binomials, estimació de la mitjana i la variància, estimació
del tamany de la població. Avantatges i inconvenients dels mètodes
d'estimació estudiats.

El mètode dels mínims quadrats. Introducció del mètode i exemples. Les
equacions normals. Exemples: models de regressió lineal. Mínims
quadrats amb pesos i models heteroscedàstics. Exemples: regressió
lineal amb pesos.

El mètode de la màxima versemblança. La funció de versemblança. Estimadors
de màxima versemblança. Exemples: poblacions normals, estimació del
tamany d'una població finita. Equació de versemblança. Exemples: La
distribució de Hardy-Weinberg, distribucions de Poisson. Màxima
versemblança en models exponencials uniparamètrics i K-paramètrics. El
mètode de la màxima versemblança i els altres mètodes d'estimació
estudiats.

III. COMPARACIÓ D'ESTIMACIONS. OPTIMALITAT.

Criteris d'estimació. Error absolut promig. Error quadràtic promig.
Biaix i precisió. Comparació d'estimadors basada en el error quadràtic
promig. Inadmissibilitat. Estimadors sense biaix. Estimadors uniforme-
ment de mínima variància (U.M.V.) i no biaixats. Procediments de
Bayes i minimax.

Estimadors U.M.V. no biaixats. Teorema de Rao-Blackwell. Estadístiques
completes. Famílies completes de distribucions. Teorema de Lehmann-
Scheffé. Estadístiques completes i suficients als models exponencials.
Exemples: famílies normals, famílies hipergeomètriques i distribucions
de Poisson.

La desigualtat de la informació. Condicions de regularitat. Condicions de regularitat en models exponencials. Informació de Fisher. Desigualtat de la informació. Fita inferior de Cramér-Rao. La desigualtat de la informació i el problema de l'estimació no biaixada. La desigualtat de la informació i els models exponencials.

Teoria per grans mostres. Consistència. Consistència dels estimadors obtinguts per aplicació del principi de substitució de freqüències i dels obtinguts aplicant el mètode dels moments. Normalitat assintòtica i propietats relacionades. Normalitat assintòtica dels estimadors obtinguts per aplicació del principi de substitució de freqüències i dels obtinguts pel mètode dels moments. Consistència i normalitat assintòtica de les quantiles empíriques. Eficiència assintòtica. Procediments assintòticament eficients. Estimadors de màxima versemblança i eficiència assintòtica. Comparació dels estimadors de màxima versemblança i dels estimadors U.M.V. no biaixats.

IV. INTERVALS DE CONFIANÇA I TESTS D'HIPÒTESIS.

Precisió, intervals de confiança i fites. Definicions i exemples. Coeficient de confiança d'un interval. Fites de confiança superiors i inferiors. Pivots i pivots aproximats. Exemples: fites i intervals de confiança aproximats per a la probabilitat d'èxit en proves binomials. Intervals de confiança aproximats pel paràmetre d'una distribució de Poisson. Regions de confiança en dimensió superior.

Elements de la teoria dels tests d'hipòtesis. Exposició del problema. Hipòtesis i alternatives. Hipòtesis simples i compostes. Estadística test. Valor crític. Regió d'acceptació i regió de rebuig. Funció crítica. Probabilitats d'error: error de tipus I i II. Potència contra una alternativa. Funció de potència. ¿Còm escollir un test? El p-valor: el test com a evidència. Potència i tamany mostral.

Dualitat entre tests i regions de confiança. Exemples: poblacions normals. Obtenció de tests a partir d'intervals i fites de confiança, i d'intervals i fites de confiança a partir de tests. Dualitat entre

famílies de tests de nivell α i regions de confiança de nivell $1-\alpha$.

V. TESTS DE LA RAÓ DE VERSEMBLANÇA I PROCEDIMENTS RELACIONATS.

El lema de Neyman-Person. Tests uniformement més potents. El lema de Neyman-Pearson. Exemples: Distribucions normals. Estimació del tamany de la població. Distribucions multinomials.

Tests uniformement més potents (U.M.P.). Tests U.M.P. en models exponencials. Exemples: poblacions normals i binomials. Distribucions gamma. Monotonia de la raó de versemblança i tests U.M.P. Exemples: Control de qualitat. Errors amb distribució de Cauchy. Relació entre tests U.M.P. i fites de confiança amb precisió màxima.

Raó de versemblança i procediments relacionats. Raó de versemblança. Tests de la raó de versemblança. Tests per a la mitjana d'una distribució normal. Tests i intervals de confiança per a la diferència de mitjanes de dues poblacions normals. El problema de Behrens-Fisher. La raó de versemblança en problemes de test per a distribucions normals bivariants: Tests de la independència. Intervals de confiança per a p . Tests per a la mitjana.

Aproximacions en problemes de test amb grans mostres. Distribució assintòtica de la raó de versemblança Exemples: Informació de Kullback-Leibler i test de Neyman-Pearson.

VI. MODELS LINEALS: REGRESSIÓ I ANÀLISI DE LA VARIANCA.

Introducció al model lineal general. Exemples de models lineals: Model de regressió. Model de dues mostres. Regressió amb dues variables. El model lineal general: models de regressió i models d'anàlisi de la variància, models d'anàlisi de la covariància. Exemples: model de p mostres. Reflexió sobre les hipòtesis del model lineal. Formulació matricial del model lineal.

Estimació en models lineals. La forma canònica. Estimació de funcions lineals de les mitjanes: relacions amb els mínims quadrats i amb les estimacions no biaixades. El teorema de Gauss-Markov. Estimació de la variància. Distribucions dels estimadors obtinguts i intervals de confiança. Tests d'hipòtesi en models lineals. Regressió lineal. Anàlisi de la variància.

Intervals de confiança simultanis. La solució de Bonferroni. El mètode de Tuckey i el mètode de Scheffé.

VII. ANÀLISI DE DADES DISCRETES.

El problema de la bondad d'ajustament a una hipòtesi donada: el test chi-quadrat. Bondad d'ajustament a famílies paramètriques de distribucions. Taules de contingència. El model de p mostres i "regressió" per a variables binomials.

VIII. MODELS NO PARAMÈTRICS.

Comparacions basades en rangs. L'estadística de Wilcoxon. Intervals de confiança i estimacions en la comparació de dues poblacions. Test dels signes i test dels rangs amb signe. Comparació de p poblacions. Tests per a l'independència.

Estimacions robustes.

Bondad d'ajustament i selecció de models. El test de Kolmogorov.