

PROGRAMA DE RELATIVITAT GENERAL (5é curs de Físiques)

## 0.- INTRODUCCIÓ

## I.- GEOMETRIA DIFERENCIAL

Varietats diferenciables i tensors: Definició de varietat. Exemples: l'esfera i altres, Corbes. Vectors i camps de vectors. Vectors base i camps de vectors base. Fibrats. Camps de vectors i corbes integrals. Parèntesi de Lie i bases no coordenades. 1-formes. Tensors i camps de tensors. Producte tensorial i contracció. Canvis de base. Operacions tensorials. Producte tensorial i contracció. Canvis de base. Operacions tensorials. El tensor mètric en una varietat. La varietat mètrica és localment plana.

Derivades de Lie: Transport de Lie d'un camp de vectors. Derivada de Lie de vectors i formes. Subvarietats. Teorema de Frobenius. Invariança, Vectors de Killing.

Formes diferencials: Algebra i càlcul integral de formes: Tensors antisimètrics. Formes diferencials i algebra de Grassmann. Orientabilitat de varietats. Volums i integració en varietats. N-vectors i l'operador dual. Elements de volum mètrics. Càlcul diferencial de formes: La derivada exterior. Derivades de Lie de formes. Teoremes de Stokes i de Gauss. Les equacions de Maxwell en formes.

Connexions per varietats Riemannianes: El principi d'equivalència i les varietats Riemannianes. Connexions i derivada covariant. Torsió. Relació derivada de Lie - derivada covariant. Geodèsiques. Coordenades normals. Tensor de Riemann. Interpretació geomètrica del tensor de Riemann. Desviació geodèsica. Compatibilitat de la connexió, el volum i la mètrica. Connexions mètriques. Tensor de Weyl. Geodèsiques i corbes extremals. Formes, integració i lleis de conservació. El tensor de Riemann en formes.

## II.- EL PRINCIPI D'EQUIVALÈNCIA I LES EQUACIONS D'EINSTEIN

Tensor energia-moment: Flux de partícules. Tensor d'energia-moment per pols. Termodinàmica. Tensor energia-moment per un fluid general. Lleis de conservació. Fluids perfectes. Lleis de conservació per un fluid perfecte.

El principi d'equivalència: El camp gravitatori i la Relativitat Especial. El pas de la geometria diferencial a la gravitació. Electromagnetisme. Mesura del camp gravitatori.

Les equacions d'Einstein: La constant cosmològica. Límit Newtonià de les equacions d'Einstein. Les equacions del moviment de partícules de prova. Les equacions d'Einstein des d'un principi variacional. El problema de Cauchy per a les equacions d'Einstein. Hipersuperfícies tri-dimensionals i fórmula de reducció del tensor de curvatura. El problema de valors inicials.

### III.- TEORIA LINEALITZADA DE LA GRAVITACIÓ I ONES GRAVITATÒRIES

La teoria linealitzada de la gravitació: Equacions de la teoria linealitzada. Cas electrodinàmic. Camp llunyà d'una font que depèn del temps. La mètrica aproximada. Propietats del camp llunyà. Camps llunyans per distribució arbitrària de masses.

Pseudo-tensor energia-moment del camp gravitatori: Construcció del pseudo-tensor. Sobre l'energia del camp gravitatori. Equacions de balanç pel moment i el moment angular.

Ones gravitatòries: Ones gravitatòries planes en la teoria linealitzada. Gauge transversal de traça nul·la. Desviació geodèsica per les ones gravitatòries. Polarització d'una ona plana. Energia-moment de les ones gravitatòries. Una ona plana solució exacta.

Generació i detecció d'ones gravitatòries: Generació d'ones gravitatòries. Aproximació de moviment lent. Energia i moment radiats. Reacció a la radiació. Exemple: dues masses en òrbita. Fonts astrofísiques de radiació gravitatòria. Detecció d'ones gravitatòries. Secció eficaç d'una detector. Límits quàntics.

### IV.- SOLUCIONS EXACTES I CLASSIFICACIÓ

Camps de vectors preferents: Camps irrotacionals. Camps geodèsics. Camps de Killing. Camps de vectors tipus temps. Descomposició invariant i interpretació física. Sistemes de coordenades especials. Camps de vectors nuls. Tètrades nul·les de Newman-Penrose. Geodèsiques nul·les. Escalars òptics. Equació de Raychaudhuri.

Classificació de Petrov: Classificació algebàrica dels camps electromagnètics. Bivectors autoduals. Expansió del tensor camp electromagnètic. La classificació del camp electromagnètic (la formulació)

La classificació del camp electromagnètic (2a formulació). Interpretació física dels camps electromagnètics nuls. Classificació algebraica dels camps gravitatoris. Expansió del tensor de Weyl. La classificació del camp gravitatori (1a formulació). La classificació del camp gravitatori (2a formulació). Camps gravitatoris degenerats del buit i teorema de Goldberg-Sachs.

Vectors de Killing i grups de moviment: Relacions entre el tensor de curvatura i els vectors de Killing. Grups de moviment. Les constants d'estructura. Classificació d'espais d'acord amb els grups de moviment. Els models de Bianchi. Vectors de Killing i lleis de conservació.

Solucions exactes: Solucions amb simetries. Les solucions de Weyl, camps buits, simetria axial i estàtiques. Solucions del buit amb simetria axial i estacionàries. Solucions amb espais de curvatura constant. Espais tridimensionals i espais quadridimensionals.

#### V.- COL.LAPSE GRAVITATORI I FORATS NEGRES

La mètrica de Schwarzschild: Simetria esfèrica. Càlcul del tensor de Ricci. Solucions del buit. Teorema de Birkhoff. La solució interior Equacions del moviment. Les equacions del camp. L'estructura interior d'una estrella en general. Solució amb densitat constant.

Estrelles i col.lapse: Teorema de Buchdahl. Evolució estel·lar. Pressió mecànico-quàntica. Energia de degeneració. Nanes blanques. Límit de Chandrasekhar. Estrelles de neutrons. Col.lapse gravitatori

La geometria de Schwarzschild: Trajectòries a l'espai-temps de Schwarzschild. Tipus d'òrbites. Corriments del periheli. Deflecció dels raigs de llum. Retard en el temps de senyals de radar. Naturalitat de la superfície  $r=2M$ . Horitzó. Coordenades de Kruskal-Szekeres. Coordenades de Novikov i d'Eddington-Finkelstein.

Forats negres més generals: Conjectura de Thorne. Teoremes de Price, de "sense pels", de Hawking-Carter-Robinson, de l'àrea. Hipòtesi de la censura còsmica. Forat negre de Kerr. Arrossegament dels sistemes inercials. Ergosfera. Horitzó. Col·lisió de forats negres. Fotó equatorial a la mètrica de Kerr. Procés de Penrose. Radiació de Hawking. Termodinàmica dels forats negres.

## VI.- COSMOLOGIA

Mètriques de Friedman-Robertson-Walker: El principi cosmològic.

Partícules i fotons a les mètriques de FRW. Mesures de distàncies i horitzons de FRW. Univers tancats.

Dinàmica de les mètriques de FRW: Les equacions d'Einstein per mètriques de FRW. Univers d'Einstein. Univers de de Sitter. Univers radiatiu. Univers de Friedman. Models amb equació d'estat arbitrària.

L'Univers estàndard actual: Corriments al roig i densitat de massa.

Fons cosmològic de radiació electromagnètica. Schwarzschild dintre de Friedman. Galaxies.

Història tèrmica de l'Univers i nucleosíntesi: Radiació en un univers en expansió. La matèria en un univers en expansió. Interacció matèria-radiació. Època d'equilibri tèrmic. Època de la nucleosíntesi. Època de plasma. Època de recombinació. L'últim scattering de la radiació.

L'Univers primitiu: Dificultats del model estàndard a l'època preleptònica. El problema de l'horitzó i el problema de l'espai pla. L'Univers inflacionari. L'Univers com a fluctuació del buit. Constant cosmològica, dimensió i signatura.

Models cosmològics no estàndard: Bianchi tipus I amb l'equació d'estat de pols. L'Univers de Gödel. Teoremes de singularitats.

## BIBLIOGRAFIA

- S. Chandrasekhar, "The Mathematical Theory of Black Holes", Oxford University Press (1983).
- S.W. Hawking and G.E.R. Ellis, "The Large Scale Structure of Space-Time", Cambridge University Press (1973).
- D.K. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum and E. Herlt, "Exact Solutions of Einstein's Field Equations", Cambridge Univ. Press (1980)
- L. Landau and E.M. Lifshitz, "The Classical Theory of Fields", (4th Edition), Pergamon Press (1975)
- C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, "Gravitation", Freedman (1973)
- P.J.E. Peebles, "Physical Cosmology", Princeton University Press (1971)
- B.F. Schutz, "Geometrical Methods of Mathematical Physics", Cambridge University Press (1980)
- M. Stephani, "General Relativity", Cambridge University Press (1982).
- S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology", John Wiley and Sons (1972)
- Ya. B. Zeldovich and I.D. Novikov, "Relativistic Astrophysics", The University of Chicago Press (1971).
- Ya. B. Zeldovich and I.D. Novikov, "The Structure and Evolution of the Universe", The University of Chicago Press (1983)