

PROBABILITAT I ESTADÍSTICA. 2on. INFORMÀTICA

Programa de l'assignatura. Curs 87-88

Professors: R. Martínez i A. Sintes

Programa:

Capítol 1. El model probabilístic.

- 1.1 Experiments aleatoris amb regularitat estadística. Teoria freqüencial de la Probabilitat.
- 1.2 Els espais de probabilitat com a models matemàtics dels experiments amb regularitat estadística: l'espai de resultats, la σ -àlgebra dels esdeveniments i la mesura de probabilitat associats a un experiment aleatori.
- 1.3 L'axiomàtica de Kolmogorov: conseqüències. Espais de probabilitat discrets i no discrets. Exemples: la definició clàssica de Probabilitat i les seves limitacions.
- 1.4 Esdeveniments independents. Interpretació freqüencial de la independència. Probabilitat condicionada. Teorema de les probabilitats totals i fórmula de Bayes.
- 1.5 Estudi d'un exemple: Repartiment de boles en urnes i mostreig d'una població finita. Probabilitat d'ocurrència d'exactament m de n esdeveniments, i de com a mínim m de n esdeveniments donats.

Capítol 2. Variables i vectors aleatoris.

- 2.1 Definició de variable aleatòria. Diferents caracteritzacions de les variables aleatòries. Operacions amb variables aleatòries.
- 2.2 Variables aleatòries discretes i no discretes. Distribució de probabilitat o llei d'una variable aleatòria. L'espai de representació d'una variable aleatòria. Funció de distribució d'una variable aleatòria i les seves propietats. Inverses.
- 2.3 Exemples de variables aleatòries discretes: variables aleatòries relacionades amb el problema del repartiment de boles en urnes, variables aleatòries binomials, hipergeomètriques, geomètriques, binomials negatives i Poisson.

- 2.4 Variables aleatòries contínues i absolutament contínues. Densitats. Exemples de variables absolutament contínues: variables amb distribució uniforme, exponencial, normal, gamma, beta, Cauchy, Laplace (o doble exponencial), logística, Pareto, Gumbel, Pearson, etc... Funcions d'una variable aleatòria. Exemples.
- 2.5 Teorema d'estructura de les variables aleatòries no negatives. Esperança d'una variable aleatòria. Propietats. Esperança d'una funció d'una variable aleatòria. Moments i moments centrals. Variància i desviació típica. Desigualtats de Chebyshev i Jensen. Funció característica i principals propietats.
- 2.6 Definició de vector aleatori. Relació amb les variables aleatòries. Distribució de probabilitat o llei d'un vector aleatori. L'espai de representació d'un vector aleatori. Funció de distribució d'un vector aleatori: propietats. Distribucions marginals. Funció característica d'un vector aleatori. Moments conjunts. Covariància. Correlació. Desigualtat de Schwarz.
- 2.7 Independència de variables aleatòries. Criteris d'independència. Esperança d'un producte de variables aleatòries independents. Variància d'una suma de variables aleatòries independents. Independència i correlació. Distribucions condicionades. Esperança condicionada: propietats. Teorema de la doble esperança.
- 2.8 La distribució normal bivariada. Funció de densitat. Funció característica. Independència de variables aleatòries amb distribució normal conjunta. Marginals i densitats condicionades. La distribució normal multidimensional.
- 2.9 Funcions d'un vector aleatori. La tècnica de la funció de distribució. La tècnica de la funció característica i la tècnica de les transformacions. Exemples: transformacions de vectors amb distribució normal.

Capítol 3. Mostreig i distribucions en el mostreig.

- 3.1 El problema del mostreig. Successions de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, com a models matemàtics del mostreig. Teorema d'existència.
- 3.2 Estadístics. La funció de distribució empírica. Moments empírics: la mitjana empírica i la variància empírica. El problema de la convergència dels moments empírics als corresponents moments teòrics.

- 3.3 Diferents tipus de convergències de succeccions de variables aleatòries: convergència en probabilitat, quasi segura i feble (o en distribució). Relacions. Criteris de convergència.
- 3.4 Llei feble dels grans nombres i llei forta dels grans nombres (versions de chebyshev, Khintchine i Cantelli). Aplicacions: convergència de la funció de distribució empírica, teorema fonamental de l'Estadística.
- 3.5 El teorema central del límit (versions de De Moivre-Laplace i Lévy-Lindeberg). Aproximació de Poisson.
- 3.6 Mostreig de poblacions normals: el paper de la distribució normal en Estadística. La distribució χ^2 , la F i la distribució t de Student.
- 3.7 Estadístics d'ordre: definicions i càlcul de distribucions. Relació amb la funció de distribució empírica.
- 3.8 El mètode de Montecarlo. Nombres aleatoris i pseudoaleatoris. Simulació de variables aleatòries. La idea general del mètode. Aplicacions.

Capítol 4. Estimació puntual en models paramètrics.

- 4.1 El problema de l'estimació de paràmetres. Estimadors. Mètodes per a trobar-los: mètode dels moments, mètode del màxim de versemblança i altres mètodes.
- 4.2 Propietats dels estimadors puntuals. Funcions de pèrdua. Risc d'un estimador. Estimadors no biaixats. Estimadors U.M.V. Consistència. Estimadors eficients i asimptòticament normals. La fita inferior de Cramér-Rao.
- 4.3 Estadístics suficients. Criteri de factorització de Neyman-Fisher. Famílies exponencials. Estadístics complets. Teorema de Rao-Blackwell i teorema de Lehmann-Scheffé.
- 4.4 Eficiència i normalitat asimptòtica dels estimadors del màxim de versemblança. Propietats asimptòtiques dels estimadors obtinguts pel mètode dels moments: consistència i normalitat asimptòtica.
- 4.5 Estimadors de Bayes. Distribució a priori i rics de Bayes. Distribució a posteriori. Estimadors minímax.

Capítol 5. Estimació de paràmetres mitjançant intervals de confiança.

- 5.1 Introducció als intervals de confiança: exemples. Intervals i regions de confiança per un paràmetre, definicions. Pivots.

- 5.2 Intèrvals de confiança per a la mitjana i la variància d'una distribució $N(\mu, \sigma^2)$. Regions de confiança simultànies per a μ i σ^2 . Intèrvals de confiança per a la diferència de mitjanes de dues poblacions normals.
- 5.3 Mètodes per a trobar intèrvals de confiança: el mètode dels pivots, el mètode estadístic i mètodes per a grans mostres.

Capítol 6. Tests d'hipòtesis.

- 6.1 Hipòtesis: hipòtesi nul·la i alternativa. Tests. Regió d'acceptació i de rebuig. Errors de primera i de segona espècie. Potència d'un test i nivell de significació. Tests U.M.P.
- 6.2 Tests per a hipòtesis simples: El lema de Neymann-Pearson. Tests per a hipòtesis compostes: tests basats en la raó de versemblances. Propietats assímptòtiques.
- 6.3 Tests d'hipòtesis en el mostreig de poblacions normals. Tests de la mitjana, test de la variància, test per a n mitjanes i per a n variàncies (els tests clàssics).
- 6.4 El test χ^2 de la bondad d'ajustament. Cas de dependència de paràmetres desconeguts. Relació amb els tests de la raó de versemblances. Tests d'independència i taules de contingència.
- 6.5 Relació entre tests d'hipòtesis i els intèrvals i regions de confiança.

Capítol 7. Models lineals (simples).

- 7.1 Exemples de models lineals simples. Definició dels models lineals. Cas A: distribucions normals. Cas B: distribucions desconegudes.
- 7.2 Cas A: Estimació dels paràmetres del model. Intèrvals de confiança pels paràmetres del model i tests d'hipòtesis sobre els paràmetres del model.
- 7.3 Cas B: Estimació dels paràmetres del model. Optimalitat dels estimadors obtinguts pel mètode dels mínims quadrats: teorema de Gauss-Markov.

Capítol 8. Mètodes no paramètrics.

- 8.1 La funció de distribució empírica. La distància de Kolmogorov. Test de bondad d'ajustament de Kolmogorov-Smirnov. Bandes de confiança per a la funció de distribució.
- 8.2 Estimació puntual i mitjançant intèrvals de confiança d'una quantila. Tests d'hipòtesis sobre quantiles.

- 8.3 Igualtat de dues distribucions. Test dels signes per a dues mostres.
Test de les seqüències. Test de les medianes. Tests basats en rangs.

Capítol 9. Introducció als processos estocàstics. Cadenes de Markov i
procés de Poisson.

- 9.1 Exemples de processos estocàstics. Processos a temps discret i a temps continu. Els processos estocàstics com a funcions aleatòries.
- 9.2 Processos de temps d'espera i processos de comptar associats. Relació entre les seves distribucions. Exemples. Comportament per a temps grans.
- 9.3 L'equació de la renovació: Probabilitats de recurrència. Procés de renovació. Persistència i transitorietat.
- 9.4 Passeig aleatori simètric. Normalitat asimptòtica de la posició de la partícula. Distribució de la màxima distància aconseguida per la partícula.
- 9.5 El procés d'urna de Polya. Distribució asimptòtica de la proporció de boles blanques tretes.
- 9.6 Cadenes de Markov: definició i exemples. Matriu de probabilitats de transició. distribucions estacionàries i comportament per a temps grans.
- 9.7 El procés de Poisson com a procés de comptar associat a una successió de temps d'espera amb distribució exponencial. Independència dels increments i la seva distribució. Processos de Poisson compostos.
- 9.8 Processos de Naixement i Mort: introducció a la teoria de ques.

Bibliografia:

- Allen, O. (1978). "Probability, Statistics and queueing theory with applications to computer Science". Academic Press.
- Ash, R. (1970). "Basic Probability theory". John Wiley & Sons.
- Chung, K.L. (1974). "Elementary Probability theory with Stochastic Processes." Springer-Verlag.
- (*) Feller, W. (1970) "Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones." (2 vol.) Limusa.
- Larson, H. (1978) "Introducción a la teoría de la Probabilidad e Inferencia Estadística". Limusa.
- (+) Mood; Graybill & Boes. (1963). "Introduction to the Theory of Statistics." Mc Graw-Hill.
- Parzen, E. (1960) "Modern probability Theory and its Applications." J. Wiley.
- Ross, S.M. (1972) "Introduction to Probability Models." Academic Press.
- Sobol, I.M. (1976) "Método de Montecarlo." Mir

(*) Llibre de consulta.

(+) Força adequat com a text.