ASSIGNATURA 04018 4.º Mat.
PROFESSOR A. CALSINA

# PROGRAMA DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

## Tema I Ecuación de ondas unidimensional

1- Deducción de la ecuación de la cuerda oscilante. 2- El problema de valor inicial. 3- La fórmula de D'Alembert. Ecuación integral y soluciones generalizadas. Propagación de singularidades. Líneas características. Zonas de dependencia y de influencia. 4- La ecuación de ondas en un segmento acotado. Condiciones de contorno de extremo libre y de extremo fijo. Método de prolongación. 5- Separación de variables. Principio de superposición. Series de Fourier.

## Tema II Ecuación de ondas en dimensión superior

1- La ecuación de ondas en dimensión 2 y 3: las oscilaciones de membranas, de volúmenes, la propagación del sonido y de la luz. 2- El problema de valor inicial en $R^3$. Medias esféricas. El principio de Huyghens. El método del descenso de Hadamard para el problema plano. 3- Ecuación de ondas en dominios acotados: el método de Fourier o de separación de variables. Teoremas sobre la infinidad de los valores propios y sobre la completitud de las funciones propias. 4- Algunos casos importantes: la membrana rectangular y la membrana circular.

## Tema III Ecuación del calor

1- Deducción de la ecuación del calor. 2- El problema de valor inicial y de contorno para la ecuación del calor en un segmento finito y en dominios acotados del plano y del espacio. 3- El principio del máximo. Teorema de unicidad. 4- El método de Fourier para la ecuación del calor en un segmento. Regularidad de las soluciones. 5- La ecuación del calor en la recta, el plano y el espacio: la fórmula de Poisson. Unicidad y regularidad. 6- El método de Fourier para dominios acotados en dimensión superior a uno.

Tema IV Ecuación del potencial

Campo creado por una distribución espacial de masa. Función potencial y campo solenoidal: ecuación de Laplace en el exterior de las masas. 2- Ecuación de Laplace para soluciones estacionarias de las ecuaciones de ondas, del calor, movimiento irrotacional de fluidos perfectos, etc. 3- Ecuación de Poisson. 4- Identidades de Green y representación integral. Funciones armónicas. Propiedades de regularidad, teorema del valor medio, principio del máximo. 5- Problemas de contorno interiores para la ecuación de Laplace. El problema de Dirichlet en electrostática, termostática. El problema de Neumann. Unicidad de soluciones. Ecuación de Helmholtz. 6- Funciones de Green. Función de Green en la esfera.

Tema V El problema de Dirichlet

1- Existencia y unicidad de soluciones. 2- Potenciales de superficie. Ecuaciones integrales de Fredholm. 3- El principio de Dirichlet.

Tema VI El espacio de Hilbert

1- Espacio de Hilbert: norma y completitud. Espacios de Hilbert (ejemplos). El espacio $L^2(\Omega)$. 2- Operadores acotados. 3- Teorema de la proyección sobre un convexo cerrado. Teorema de la proyección sobre un subespacio cerrado. Descomposición ortogonal. 4- Dual de un espacio de Hilbert. Teorema de representación de Riesz-Fréchet. 5- Teorema de la aplicación abierta. 6- Base ortonormal.

Tema VII Espacios de Sobolev

1- Núcleos de mediación y particiones de la unidad. 2- Derivadas generalizadas en $L^2(\Omega)$. 3- Espacios de Sobolev. Completitud. 4- Densidad de $C^k(\bar{\Omega})$ en $H^k(\Omega)$: operadores de prolongación. 5- Lema de Sobolev. 6- Lema de Rellich. 7- El espacio $H^1_0(\Omega)$. Desigualdad de Poincaré.

Tema VIII El problema de Dirichlet en $L^2(\Omega)$

1- Soluciones débiles de los problemas de Poisson con condiciones de Dirichlet, Neumann, etc. 2- Problema débil de Dirichlet para ecuaciones elípticas con coeficientes regulares. 3- Regularidad en el interior de las soluciones del problema de Dirichlet. 4- Regularidad en la frontera. 5- Recuperación de las soluciones clásicas. 6- Formulación variacional y principio de Dirichlet.

Tema IX Operadores lineales en un espacio de Hilbert

1- Operadores lineales densamente definidos. 2- Operadores compactos. Operadores integrales. 3- Adjunto de un operador en un espacio de Hilbert. Operadores simétricos y operadores autoadjuntos. 4- Operadores cerrados. Teorema de la gráfica cerrada. 5- Espectro de un operador. Operador resolvente. 6- Espectro de un operador compacto. Teoría de Riesz-Fredholm. Ecuaciones integrales de Fredholm. 7- Desarrollo en serie de funciones propias de operadores autoadjuntos. 8- El operador de Dirichlet.

Tema X Ecuaciones de evolución

1- El problema de valor inicial en un espacio de Hilbert. 2- El problema de valor inicial para un operador lineal acotado. 3- El problema de valor inicial para un operador autoadjunto con resolvente compacto. 4- La ecuación del calor en un dominio acotado: existencia y unicidad, regularidad. 5- El teorema de Hille-Yosida. 6- La ecuación de ondas.

Tema XI El teorema de Cauchy-Kovalevskaya

1- El problema de Cauchy para una ecuación lineal de segundo orden. El método del desarrollo en serie de potencias. Concepto de superficie característica. 2- El teorema de Cauchy-Kovalevskaya para ecuaciones lineales de segundo orden. 3-Clasificación de las ecuaciones lineales de segundo orden. 4- El teorema de Cauchy-Kovalevskaya para ecuaciones no lineales. Concepto de problema característico. (..)