

## MODELOS MATEMATICOS

**Profesor:** David Pérez Castrillo

Despacho B3-134, Teléfono: 581-1405

Tutorías: Martes y Miércoles de 10.30 a 12.

**Método de evaluación:** La nota final será la media de la nota obtenida en los dos semestres del curso, siempre y cuando ambas notas superen 5. Habrá examen parcial liberatorio para cada uno de los exámenes, y los alumnos que aprueben uno de los dos parciales tendrán dicho parcial aprobado hasta la convocatoria de septiembre. Tanto la convocatoria de junio como la de septiembre constará de dos exámenes semestrales, siendo necesario aprobar los dos para aprobar el curso. El examen constará de una parte teórica sencilla y otra de problemas.

### Bibliografía

Madden, P. (1987) *Concavidad y Optimización en Microeconomía*. Alianza Editorial, Madrid.

Luenberger, D.E. (1989) *Programación Lineal y No Lineal*. Addison-Wesley Iberoamericana, México.

Milgrom, P. y Roberts, J. (1992), *Economics, Organization and Management* Prentice Hall.

**Temario:** Modelos Matemáticos es un curso con dos semestres bastante diferenciados. Durante el primer semestre, se estudia con detalle diversos aspectos de la Teoría de Optimización. El segundo semestre aborda cómo se establecen contratos cuando una de las partes tiene más información que la otra sobre aspectos relevantes para la relación, y cuáles son las consecuencias para las organizaciones de estos aspectos informativos. Unos apuntes sobre esta parte serán repartidos a los estudiantes.

**Primer semestre.**

**Tema 1.- Conjuntos convexos.**

Conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^n$ . Hiperplanos y semiespacios asociados en  $\mathbb{R}^n$ . Propiedades de la unión e intersección de conjuntos convexos.

**Tema 2.- Funciones cóncavas de una variable definidas en  $\mathbb{R}$ .**

Función cóncava de una variable definida en  $\mathbb{R}$ . Caracterizaciones de la concavidad mediante la derivada primera y mediante la derivada segunda. Convexidad de funciones de una variable definidas en  $\mathbb{R}$ . Hipografo y epigrafo. Caracterización de la concavidad mediante hipografos. Contorno, conjunto contorno superior e inferior. Concavidad y convexidad estrictas. Caracterización de la concavidad estricta mediante derivadas primeras.

**Tema 3.- Máximos de las funciones de una variable definidas en  $\mathbb{R}$ .**

Máximo global. Punto estacionario. Caracterización de los máximos globales. El conjunto de máximos globales. Mínimos globales.

**Tema 4.- Funciones cóncavas de n variables definidas en  $\mathbb{R}^n$ .**

Gráfica, contorno, conjunto contorno superior e inferior. Función cóncava de n variables definida en  $\mathbb{R}$ . Caracterizaciones de la concavidad mediante las derivadas primera y segunda. Demostración a través de una función auxiliar de una variable. Estricta concavidad. Composición de funciones cóncavas. Caracterización de los máximos globales de una función cóncava.

**Tema 5. Programación cóncava con una restricción.**

Conjunto factible, restricción cualificada y condiciones de Kuhn-Tucker. Teorema de Kuhn-Tucker. Demostración del teorema. Condiciones para la unicidad de las soluciones. Condiciones para la unicidad de los multiplicadores de Lagrange.

**Tema 6.- Funciones cóncavas definidas en dominios convexos.**

Generalización de las propiedades a dominios convexos y abiertos. Dominios convexos pero no abiertos. Máximos y mínimos locales.

**Tema 7.- Teorema de la envolvente.**

Familias parametrizadas de problemas de programación cóncava. El teorema de la envolvente. Demostración del teorema. Interpretación de los multiplicadores de Lagrange. Concavidad de la función valor.

**Tema 8.- Programación cóncava múltiplemente condicionada.**

Teorema de Kuhn-Tucker para programas de optimización con múltiples restricciones. Caracterización de las condiciones de Kuhn-Tucker para programas con restricciones de positividad de los parámetros. Teorema de la envolvente. Concavidad de la función valor.

**Tema 9.- Programación cóncava con restricciones de igualdad.**

Implicaciones del análisis de Kuhn-Tucker aplicado a la programación con restricciones de igualdad. Teorema de los multiplicadores de Lagrange. Condiciones necesarias y condiciones suficientes en un análisis local.

**Tema 10.- Cuasi-concavidad.**

Funciones cuasi-cóncavas. Caracterizaciones de la cuasi-concavidad. Cuasi-convexidad. Resultados de composición para funciones cuasi-cóncavas y cuasi-convexas. Función Cobb-Douglas. Función C.E.S. Cuasi-concavidad y cuasi-convexidad estrictas. Composición de funciones estrictamente cuasi-cóncavas y estrictamente cuasi-convexas.

**Tema 11.- Más sobre la cuasi-concavidad.**

Caracterización mediante derivadas primeras de las funciones no-estacionarias y cuasi-cóncavas. Teorema de Kuhn-Tucker para funciones cuasi-cóncavas. Propiedades de las funciones cuasi-cóncavas relacionadas con las segundas derivadas.

**Tema 12.- Programación lineal.**

Un ejemplo. Variable básica, solución básica, solución básica degenerada. Teorema fundamental de la programación lineal. Teorema de equivalencia de puntos extremos y soluciones básicas. Teorema de la solución factible básica y teorema de la condición de optimalidad. Determinación de una solución factible mínima. Método del simplex.

## **Tema 13. Dualidad.**

Programas lineales duales. Teorema de dualidad de la programación lineal. Relaciones con el procedimiento del simplex. Sensibilidad y holgura complementaria.

## **Segundo semestre**

### **Tema 1.- Introducción.**

- 1.1.- Las preguntas básicas.
- 1.2.- Asimetría de información: una tipología.
- 1.3.- Algunos ejemplos.

### **Tema 2.- Información simétrica.**

- 2.1.- Descripción del modelo básico.
- 2.2.- La situación de referencia: información simétrica.

### **Tema 3.- Riesgo moral: el modelo de base.**

- 3.1.- El problema de riesgo moral con esfuerzo oculto.
- 3.2.- El caso con dos esfuerzos posibles.
- 3.3.- El enfoque de primer orden.
- 3.4.- Un caso sencillo con esfuerzo continuo.
- 3.5.- Aplicaciones de los resultados obtenidos.

### **Tema 4.- Selección adversa: el modelo de base.**

- 4.1.- El problema de selección adversa. El mercado de "cacharros" de Akerlof.
- 4.2.- Un modelo de selección adversa sencillo.
- 4.3.- Un modelo de competencia entre compañías de seguros.

### **Tema 5.- El fenómeno de la señalización.**

- 5.1.- Los beneficios de señalarse.
- 5.2.- Señalización en el mercado de trabajo.
- 5.3.- Un modelo de precio límite.

**Tema 6.- Otros tópicos.**

6.1.- Riesgo moral con información oculta.

6.2.- El fenómeno del "screening".

6.3.- Relación entre los problemas de riesgo moral y de selección adversa.

6.4.- Consecuencias del establecimiento de varias relaciones simultáneas.

6.5.- Algunos comentarios sobre las consecuencias de la repetición de la relación.