

GRAFS I COMBINATÒRIA

Curs 1992/93

Departament d'Informàtica

UAB

Capítol I INTRODUCCIÓ I FONAMENTS

Definicions bàsiques

- Graf $G(V,A)$: punts i línies
- Vèrtexs, arestes i arcs
- Successors i antecessors
- Adyacència, llaç, camins i circuits
- Grau interior i grau exterior
- Teorema dels graus i corollari

Tipus de grafs

- Parcial, multigraf
- Subgraf i subgraf maximal (minimal)
- Complet, complementari
- Connex (fortament/parcialment); component i pont
- Arbre i corda
- Bipartit, bipartit complet
- Teorema dels grafs bipartits
- Isomorf i homomorf

Planaritat

- Planaritat: concepte i propietats
- Teorema de Kuratowski
- Dualitat: concepte i propietats
- Teorema de Whitney
- Test de planaritat

Connectivitat i accessibilitat

- Matrius d'adjacència i d'incidència
- Matrius d'accés R i Q
- Càlcul dels components forts i graf condensat
- Bases, contrabases i base de poder

Recorregut d'un graf:

- per amplada prioritària (Breadth First Search)
- per fondària prioritària (Depth First Search)

Capítol II INDEPENDÈNCIA, COBERTURA I COLORACIÓ

Conjunts independents i conjunts dominants

- Conjunts independents de vèrtexs
- Número d'independència $\alpha(G)$
- Algorisme de Bron i Kerbosch

Colles: densitat $\delta(G)$
Conjunts dominants de vèrtexs
Número de dominació $\beta(G)$

Cobertura i partició d'un conjunt
Formalització del problema
Possibles reduccions del problema
Algorisme de Garfinkel i Nemhauser
Adaptació a la cobertura

Coloració dels vèrtexs i número cromàtic $\gamma(G)$
Coloració dels vèrtexs
 $\gamma(G)$: concepte i fites
Caracterització dels grafs 2-colorables

Coloració dels grafs plans
El polinomi cromàtic
Obtenció aproximada de $\gamma(G)$: coloració seqüencial per graus
Obtenció exacta de $\gamma(G)$:
reducció a la cobertura
recorregut exhaustiu per backtrack

Coloració de les arestes i número cromàtic $\gamma_n(G)$

Capítol III APARELLAMENTS

Aparellaments màxims
Teorema d'Edmonds
Teorema de Hall
Obtenció d'un aparellament màxim

Aparellaments perfectes
Teorema de Tutte
Mètode particular

Aparellaments òptims
Teorema de caracterització
El problema de l'assignació de tasques

Problemes relacionats
Sistemes de representants diferents
Rectangles llatins

Capítol IV

ARBRES, CAMINS, CIRCUITS I TALLS

Nombre d'arbres generats per un graf:

- dirigit
- simètric i complet

Arbre de cost mínim d'un graf

- Algorisme de Kruskal
- Algorisme de Prim

Arbres de Steiner

- Generalització de l'arbre òptim
- Algorisme de Sullivan

Brançatges

Camins mínims entre dos vèrtexs

- Grafs amb costos constants: algorisme de Moore
- Grafs sense costos negatius: algorisme de Dijkstra
- Grafs amb costos negatius: algorisme de Ford

Camí mínim entre qualsevol parella de vèrtexs

- Algorisme de Floyd
- Generalització del mètode

Problemes relacionats:

- el camí més probable
- el camí de capacitat màxima
- el camí de màxima capacitat esperada
- grafs P.E.R.T.

Circuits i talls

- Número ciclomàtic i cociclomàtic
- Circuits fonamentals
- Generació dels circuits a partir dels fonamentals
- Talls i talls propis
- Talls fonamentals
- Generació dels talls a partir dels fonamentals
- Relació entre la matriu de talls i la de circuits

Capítol V

XARXES DE TRANSPORT

- Concepte de xarxa i flux
 - Flux compatible i capacitat
 - Capacitat d'un tall dirigit
- Maximització del flux en una xarxa
 - Teorema de Ford i Fulkerson
 - Algorisme de Ford i Fulkerson
 - El graf incremental: concepte i aplicacions
- Variacions pel problema del flux màxim
 - Xarxes amb capacitats màximes
 - Xarxes amb entrades i/o sortides múltiples
 - Xarxes amb capacitats associades als vèrtexs
 - Xarxes doblement afittades
- Mètode gravitacional
- Optimització del cost per a un flux fixat
 - Algorisme de Klein
 - Algorisme de Busacker i Gowen
- Xarxes d'arcs amb guany
 - Flux d'entrada, de sortida i guany
 - Flux màxim i flux òptim
 - Cadenes incrementables
 - Cicles actius
 - Algorisme del flux màxim-òptim

Capítol VI

ELS CIRCUITS EULERIANS

- Camins i circuits eulerians
 - Teoremes d'existència
 - Algorisme de Fleury
 - Circuits eulerians mixtos
- Les seqüències de De Bruijn
 - Relació amb els circuits eulerians
- El problema del carter xinès:
 - cas de graf simètric
 - cas de graf dirigit

Capítol VII

ELS CIRCUITS HAMILTONIANS

Camins i circuits hamiltonians

Teoremes d'existència

Mètode de la multiplicació llatina

Algorisme de Roberts i Flores

El problema del viatjant (camí):

sense fixar els vèrtexs terminals

fixant els vèrtexs terminals

El problema del viatjant (circuit):

mètode basat en l'arbre de cost mínim

mètode basat en l'aparellament òptim

Capítol VIII

PROGRAMACIÓ LINEAL

Introducció i fonaments

Exemples de formulació de problemes de PL

Formulació estàndard del problema

Teorema fonamental de la programació lineal

Interpretació geomètrica i teorema dels punts extrems

L'algorisme simplex (primal)

Variables inactives i taula estàndard

Solució factible bàsica i taula canònica

Variables artificials i Fase I de l'algorisme

Esquema general del simplex (Fase I i Fase II)

Degeneració i cicles

El símplex revisat

Dualitat

Plantejament del problema dual

Relacions problema primal-problema dual

Teorema feble de dualitat i conseqüències

Condició suficient d'optimalitat

Teorema fort de dualitat i conseqüències

Teorema de complementarietat

L'algorisme simplex dual

Quan es coneix una base factible dual

Quan no es coneix una base factible dual

Simplex primal vs. simplex dual

Programació paramètrica

- Problema dels costos paramètrics
- Problema de la part dreta paramètrica

Anàlisi post-optimal

- Addició d'una variable
- Addició d'una constricció (\leq o $=$)
- Variació d'un coeficient de la matriu A
- Variació d'un coeficient de la funció objectiu
- Variació d'un terme independent

Problemes de transport

Programació lineal entera

- Formulació de problemes usant programació 0-1
- Algorisme de Gomory
- Tècnica de branch & bound

Problemes de motxilla

Bibliografia bàsica

Grafs

- CHRISTOFIDES, N.
Graph Theory, an Algorithmic Approach
Academic Press (1975)
- EVEN, S.
Graph Algorithms
Pitman Publishing Ltd. (1979)
- GIBBONS, A.
Algorithmic Graph Theory
Cambridge University Press (1985)
- HARARY, F.
Graph Theory
Addison-Wesley (1969)
- McHUGH, J.A.
Algorithmic Graph Theory
Prentice-Hall International (1990)
- MINIEKA, E.
Optimisation Algorithms for Networks and Graphs
Marcel Dekker (1978)
- ROBERTS, F.S.
Applied Combinatorics
Prentice-Hall (1984)
- TUCKER, A.
Applied Combinatorics
John Wiley & Sons (1980)

Programació lineal

- GARFINKEL R.S. & NEMHAUSER G.L.
Integer Programming
John Wiley & Sons (1972)
- LUENBERGER, D.E.
Programación Lineal y no Lineal
Addison-Wesley Iberoamericana (1989)

- MURTY, K.G.
Linear Programming
John Wiley & Sons (1983)
- THIE, P.R.
An Introduction to Linear Programming and Game Theory
John Wiley & Sons (1979)