

Combinatòria i optimització

Curs 1998-99

Departament d'Informàtica

UAB

Presentació

En el primer tema es fa un repàs dels resultats bàsics en la combinatòria clàssica. A continuació, es presenten dues eines noves per a l'estudiant —les funcions generadores i les equacions recurrents—, les quals permeten formular i resoldre alguns problemes combinatoris més complexos. Amb la programació lineal, en particular amb el mètode del simplex, es presenta un algorisme eficient per a resoldre problemes que puguin ésser representats en la forma

$$\begin{aligned} A \vec{x} &\geq \vec{b} \\ (\min) z &= \vec{c} \vec{x} \\ \vec{x} &\geq \vec{0} \end{aligned}$$

essent A la matriu de coeficients del sistema, \vec{x} el vector columna de variables, \vec{b} el vector columna de termes independents, \vec{c} el vector fila de coeficients de cost i $\vec{0}$ el vector columna de zeros. En la pràctica, situacions molt diverses del món real poden ésser modelitzades —si convé, de manera aproximada— per un sistema amb els trets que hem definit, d'ací la utilitat del que estudiarem. En particular, el cas en què les variables han de prendre valors en \mathbb{N} resulta especialment útil a l'hora de resoldre problemes de selecció óptima d'elements d'un conjunt que hagin de verificar una propietat determinada. El mètode bàsic —introduït per Dantzig l'any 1947— continua essent vàlid avui dia. A banda de ser senzill d'implementar i computacionalment eficient, té l'avantatge d'una interpretació geomètrica clara que ajuda força a entendre el procés algebraic que l'algorisme dur a terme.

En l'actualitat, es disposa de diversos paquets de càlcul que inclouen la resolució de problemes de programació lineal, en cap cas cal fer-ho amb llapis i paper. Per tant, en el curs es pretén que l'estudiant vagi descobrint i assimilant la fonamentació i el desenvolupament dels mètodes, i no pas que únicament memoritzi els passos a seguir sense haver-los comprès prèviament. Les múltiples possibilitats afegides i variacions que permet el simplex només podran ésser enteses a partir del domini dels mecanismes del mètode bàsic.

Programa

1. Combinatòria enumerativa

Regla de la suma i regla del producte

Permutacions

Combinacions i nombres binomials

Teorema binomial
Príncipi d'inclusió-exclusió
Funcions generadores ordinàries
Funcions generadores exponencials
Equacions lineals recurrents
 Plantejament
 Resolució iterativa
 Mètode de les arrels
(5 setmanes)

2. Fonaments de la programació lineal

Orígens de la programació lineal
Primers problemes estudiats
Formulació i trets del model
Interpretació geomètrica del model
Solucions factibles i solucions bàsiques
Forma estàndard del problema
Teorema fonamental de la programació lineal
Teorema de convexitat
Teorema dels punts extrems
(2 setmanes)

3. Algorisme del símplex primal

Taula estàndard
Taula canònica
Exercici: millora d'una SFB
Algorisme del símplex (fase II, variables de marge)
Algorisme del símplex (fase I, variables artificials)
Degeneració i cicles. Redundància
Representació matricial del símplex
(2 setmanes)

4. Dualitat

Dualitat: concepte i exemple
Relacions problema primal–problema dual
Teorema feble de dualitat
Condició suficient d'optimalitat
Teorema fort de dualitat
Teorema de divergència
Condicions de complementarietat
Exercici: relacions de dualitat
(1 setmana)

5. Algorisme del simplex dual

Interpretació

Coneixent una base factible dual

Sense conèixer una base factible dual

Símplex primal vs. símplex dual

(2 setmanes)

6. Anàlisi post-optimal

Objectiu

Addició d'una variable

Addició d'una constricció (\leq o $=$)

Variació d'un coeficient de la matriu del sistema

Variació d'un coeficient de la funció objectiu

Variació d'un terme independent

(1 setmana)

7. Programació lineal entera

Introducció

Exemples de formulació de problemes

Algorisme de Gomory (*Dual Cutting-Plane Method*)

Estratègia de "bifurcar i limitar" (*Branch & Bound*)

(1 setmana)

Bibliografia

Bàsica

1. BASART, J. M., RIFA, J. i VILLANUEVA, M.;
Fonaments de matemàtica discreta. Elements de combinatòria i d'aritmètica
Col·lecció Materials de la UAB, n. 36, 1997. ISBN 84-490-0855-7. (Per al tema 1 exclusivament)
2. GRIMALDI, R. P.; *Matemáticas discreta y combinatoria*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989. ISBN 0-201-64406-1.
3. MURTY, K. G.; *Linear Programming* John Wiley & Sons, 1983. ISBN 0-471-09725-X.
4. THIE, P. R.; *An Introduction to Linear Programming and Game Theory*, John Wiley & Sons, 1988. ISBN 0-471-62488-8.

Complementària

1. BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J. & SHERALI, H. D.; *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons, 1990. ISBN 0-471-63681-9.

2. DANTZIG, G. B.; *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, 1963.
ISBN 0-691-08000-3.
3. ROBERTS, F. S.; *Applied Combinatorics*, Prentice-Hall Inc., 1984. ISBN 0-13-039313-4.
4. SULTAN, A.; *Linear Programming. An Introduction with Applications*, Academic Press, 1993. ISBN 0-12-676350-X.
5. TUCKER, A.; *Applied Combinatorics*, John Wiley & Sons, 1984. ISBN 0-471-63579-0.

Avaluació de l'assignatura

La qualificació es determinarà a partir de la nota obtinguda en un examen final.