

Curs 2000-2001

## Presentació i Objectius de l'assignatura

El resultat clau del càlcul diferencial d'una variable és el Teorema Fonamental del Càlcul, que relaciona integració i diferenciació. En el primer capítol trobarem generalitzacions d'aquest resultat, en el marc de la integral de Lebesgue, i veurem que la resposta involucra classes de funcions amb bones propietats de diferenciabilitat. Algunes d'aquestes qüestions s'expressen de manera natural en termes de derivades de mesures.

Tradicionalment, molts problemes matemàtics i models físics s'han abordat presuposant hipòtesis fortes de regularitat (funcions diferenciables, varietats diferenciables...). Tanmateix, especialment durant els últims vint anys, diverses branques de la matemàtica pura i aplicada s'han interessat per conjunts molt "irregulars" (fractals), en el sentit que les eines habituals del càlcul diferencial i els conceptes de longitud, àrea i volum ja no són suficients per a la seva descripció. En la segona part del curs s'estudiarà una forma de mesurar aquesta "irregularitat" i també es veurà un petit catàleg de problemes que originen conjunts "irregulars".

## Programa

### 1. Diferenciació

#### 1.1 Diferenciació de mesures.

Mesures generals: propietats bàsiques i construccions. Teoremes de recobriment. Diferenciació de mesures. Mesures absolutament contínues i singulars. Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym. Teorema de diferenciació de Lebesgue. Punts de densitat.

#### 1.2 Diferenciació de funcions reals.

Funcions contínues no derivables en cap punt(I). Funcions monòtones. Funcions de variació acotada i absolutament contínues. El Teorema Fonamental del Càlcul reinterpretat. Funcions lipschitzianes. Teorema de Rademacher.

### 2. Mesures de Hausdorff, fractals i aplicacions.

#### 2.1 Mesures i dimensió de Hausdorff

Motivacions: necessitat de distingir conjunts de mesura zero, dimensions fraccionàries. Definició, construcció i propietats bàsiques de la mesura de Hausdorff. Dimensió de Hausdorff. Exemples. Conjunts de Cantor.

#### 2.2 Fractals i aplicacions

Altres nocions de dimensió. Autosemblança. Aproximació de números irracionals per racionals: Teoremes de Jarnik. Funcions contínues no derivables en cap punt (II). Camins aleatoris. Trajectòries del moviment Brownià. Conjunts de Julia i Mandelbrot.

## **Bibliografia**

### **Bibliografia bàsica**

Falconer. *The geometry of fractal sets*. Cambridge University Press. 1985

Guzmán-Rubio. *Integración: teoría y técnicas*. Alhambra. 1979

McDonald-Weiss. *A course in Real Analysis*. Academic Press. 1999

Rudin. *Análisis Real y Complejo*. McGraw Hill. 1988

### **Bibliografia complementària**

Barnley. *Fractals everywhere*. Academic Press. 1988

Benedetto. *Real variable and integration*. Teubner Stuttgart. 1976

Cherbit. *Fractals. Non-integral dimensions and applications*. Wiley and Sons. 1990

Foran . *Fundamentals of Real Analysis* . Dekker. 1991

Hewitt-Stromberg. *Real and Abstract Analysis*. Springer Verlag. 1965

## **Coneixements matemàtics previs**

Càlcul diferencial d'una i diverses variables, mesura i integració de Lebesgue.

## **Professors**

José González Llorente. Despatx: C1-156. e-mail: gonzalez@mat.uab.es

## **Avaluació**

Examen de problemes al final de curs. Hi haurà possibilitat d'obtenir puntuació adicional mitjançant la resolució de problemes.