20332	**Anàlisi Funcional**
Tipus: Optativa	*Crèdits:* 7.5

Curs 2000-2001

Presentació i Objectius de l'assignatura

L'anàlisi funcional és una branca molt extensa de les matemàtiques . Podem dir que és l'estudi dels espais de funcions o més generalment l'estudi d'espais on hi ha una estructura algebraica i una topològica compatibles entre elles.
Hi ha tres aspectes d'aquesta disciplina que mereixen ser destacats. El primer és que té aplicacions a moltes branques de la matemàtica com: la teoria de funcions reals, la teoria de nombres, l'anàlisi complexa, la teoria del potencial, etc. així com fora de les matemàtiques: enginyers de sistemes, mecànica quàntica, física de l'àtom, etc. El segon és que en el seu desenvolupament se interrelaciona i fa ús d'altres disciplines de la matemàtica com són: l'anàlisi real, la topologia, l'àlgebra, la geometria, l'anàlisi complexa, etc.; alguns dels conceptes importants en matemàtiques han sorgit en el seu origen per estudis vinculats a l'anàlisi funcional. El tercer fa referència al seu grau d'abstracció que és molt elevat. El voler establir en un àmbit el "més general possible"resultats que en casos especials tenen demostracions més concretes com per exemple: separació de conjunts convexos, existència d'hiperplans suport, existència de funcions lineals, densitat de subespais, etc. fa necessària l'abstracció.
Aquesta assignatura està plantejada de forma autocontinguda, llevat d'alguns resultats, que habitualment s'expliquen a altres assignatures, però que el seu coneixement enriqueix l'àmbit d'aplicació de l'anàlisi funcional. Els hem agrupat en els punts 2.1 i 2.2 del programa. Els objectius que les/els alumnes volem que assoleixin són:

1. Conèixer els resultats de la teoria exposada.

2. Que agafin suficient destresa en les tècniques, en les idees, i els conceptes introduïts de forma que davant d'enunciat no vist: *"en un espai uniformement convex el problema de la distància a un convex complet sempre té solució única"* es vegin amb ànims de resoldre'l.

3. Ajudar a entendre millor conceptes d'altres assignatures ja cursades, per exemple: convergència uniforme, sèries i integral de Fourier, aplicacions lineals, topologia producte, espais de Hilbert, etc.

Coneixements matemàtics previs

Per seguir aquesta assignatura és necessari haver cursat l'Anàlisi Real. També és recomanable haver seguit l'Anàlisi Complexa.
Finalment, sense ser un requisit, pot resultar profitós tenir nocions de les assignatures d'Ampliació d'Anàlisi Real i d'Equacions Diferencials.

Programa

1. Primeres propietats dels espais de Banach.

1.1 Motivació: resolució d'equacions diferencials. Equacions integrals de Volterra i de Fredholm.

1.2 Espais normats i espais de Banach. Topologia dels espais de Banach. Exemples. Quocients i productes d'espais normats.

1.3 Aplicacions lineals contínues. Espais d'aplicacions lineals. Normes equivalents.

1.4 Espais normats de dimensió finita. Teorema de Riesz. Suma de subespais.

1.5 Teorema de punt fix de Banach. Sèries en espais de Banach. Resolució d'equacions diferencials i integrals.

2. Teoremes centrals dels espais de Banach.

2.1 Exemples de duals d'espais de Banach.

2.2 L'espai C(K). Teoremes de Stone-Weierstrass. Teorema d'Ascoli-Arzelà. Espais separables.

2.3 Teorema de Hahn-Banach i conseqüències. Aplicacions.

2.4 Teorema de Baire. Espais de funcions diferenciables. Límits de funcions contínues. Altres aplicacions del teorema de Baire.

2.5 Principi d'acotació uniforme i conseqüències. Convergència de la sèrie de Fourier i altres aplicacions.

2.6 Teorema de l'aplicació oberta i de la gràfica tancada. Aplicacions.

2.7 Topologia dèbil. Teorema de Banach-Alaoglu. Espais reflexius.

2.8 Conjunts convexos en espais normats. Teorema de Krein-Milman.

3. Àlgebres de Banach.

3.1 Àlgebres de Banach. Exemples.

3.2 Elements invertibles i ideals. Quocient d'un àlgebra de Banach.

3.3 Funcions analítiques a valors en un àlgebra de Banach. Teoremes de Cauchy i Liouville. Espectre d'un element. Teorema de Gelfand-Mazur. Radi espectral.

3.4 Caràcters i ideals maximals. Espectre d'una àlgebra. La transformació de Gelfand.

3.5 El càlcul funcional de Riesz. Canvi de l'espectre per una transformació analítica.

3.6 Aplicacions i exemples. Teorema de Weiner. Les àlgebres $\mathcal{L}^1(G)$.

4. Operadors en espais de Hilbert.

4.1 Operadors compactes en espais de Banach. Propietats.

4.2 Adjunt d'un operador. Operadors normals, autoadjunts i unitaris. Valors i vectors propis.

4.3 Teorema espectral per a operadors compactes i normals. Alternativa de Fredholm.

4.4 Mesures espectrals. Integració respecte a una mesura espectral.

4.5 Representació d'àlgebres dins un espai d'operadors. Representació de C(X).

4.6 Teorema espectral per operadors normals. Cas particular.

Bibliografia

A. L. Brown and A. Page *Elements of Functional Analysis (1970)* Van Nostrand.

J. Bruna *Anàlisi Real (1996)* Materials de la UAB, número 26.

J. B. Conway *A course in Functional Analysis (1985)* Graduate texts in Mathematics, n 96. SpringerVerlag.

W. Rudin *Análisis Real y Complejo (1985)* Ed. Alhambra.

W. Rudin *Functional Analysis (1991)* McGraw Hille, 2 edició.

Professors

Joan Josep Carmona, despatx C1-112.
Hores de Tutories: dimarts i dijous de les 10:00 a les altres hores a convenir.

Avaluació

Serà mitjançant un examen de 4 o 5 problemes que inclourà teoria. Cada alumne podrà lliurar-me dos problemes resolts que contaran un màxim d'un punt a sumar a la nota de l'examen a fi d'obtenir la nota final.