
20331

Ampliació Anàlisi Real

Tipus: Optativa

Crèdits: 7.5

Curs 2001-2002

Presentació i Objectius de l'assignatura

El resultat clau del càlcul diferencial d'una variable és el Teorema Fonamental del Càlcul, que relaciona integració i diferenciació. En el primer capítol trobarem generalitzacions d'aquest resultat, en el marc de la integral de Lebesgue, i veurem que la resposta involucra classes de funcions amb bones propietats de diferenciabilitat. Algunes d'aquestes qüestions s'expressen de manera natural en termes de derivades de mesures. Tradicionalment, molts problemes matemàtics i models físics s'han abordat pressuposant hipòtesis fortes de regularitat (funcions diferenciables, varietats diferenciables...). Tanmateix, especialment durant els últims vint anys, diverses branques de la matemàtica pura i aplicada s'han interessat per conjunts molt *irregulars* (fractals), en el sentit que les eines habituals del càlcul diferencial i els conceptes de longitud, àrea i volum ja no són suficients per a la seva descripció. En la segona part del curs s'estudiarà una forma de mesurar aquesta "irregularitat" i també es veurà un petit catàleg de problemes que originen conjunts *irregulars*.

Programa

1. Diferenciació.

1.1 Diferenciació de funcions reals.

Funcions contínues no derivables. Diferenciabilitat de les funcions monòtones. Funcions de variació acotada i continuïtat absoluta. Teorema fonamental del càlcul reinterpretat. Teorema de descomposició de Lebesgue. Funcions Lipschitzianes. Teorema de Rademacher.

1.2 Diferenciació de mesures.

Mesures generals: propietats bàsiques i construccions. Teoremes de recobriment. Diferenciació de mesures. Mesures absolutament contínues i singulars. Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym. Teorema de diferenciació de Lebesgue. Punts de densitat.

2. Mesures de Hausdorff, fractals i aplicacions.

2.1 Mesures i dimensió de Hausdorff.

Motivacions: necessitat de distingir conjunts de mesura zero, dimensions fraccionàries. Definició, construcció i propietats bàsiques de la mesura de Hausdorff. Dimensió de Hausdorff. Exemples. Conjunts de Cantor.

2.2 Fractals i aplicacions.

Altres nocions de dimensió. Autoemblaça. Aproximació de números irracionals per racionals: Teoremes de Jarnik. Funcions contínues no derivables en cap punt (II). Camins aleatoris. Trajectòries del moviment Brownià. Conjunts de Julia i Mandelbrot.

Coneixements matemàtics previs

Càcul diferencial d'una i diverses variables, mesura i integració de Lebesgue. Nocions de teoria de la mesura.

Bibliografia bàsica

- K. J. FALCONER, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985.
- W. RUDIN, *Anàlisi Real y Complejo*, Alhambra, 1985.
- S. B. CHAE, *Lebesgue Integration*, pure and Applied Mathematics 58, Dekker, 1980.

Bibliografia complementària

- P. MATTILA, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press, 1995.
- K. R. STROMBERG, *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth International Mathematics Series, 1981.
- G. CHERBIT, *Fractals. Nonintegral dimensions and applications*, Wiley and Sons, 1990.

Professors

Joan Orobítg, despatx C1/316 (orobitg@mat.uab.es).

Avaluació

L'avaluació es farà amb un examen final (amb tota la matèria del programa), el qual consistirà principalment en la resolució de problemes, però també contindrà una part teòrica. La presentació a l'examen (entrada a l'aula) consumeix convocatòria.

A més, hi haurà una prova escrita a meitat del quadrimestre. Aquesta prova no elimina matèria, puntuà sobre 2 i la nota obtinguda es suma a la nota de l'examen final, puntuat sobre 8.