$$\int_M K\sigma = 2\pi\chi(M)$$

# GEOMETRIA RIEMANNIANA

## Presentació i Objectius de l'assignatura

Una *varietat de Riemann* (G. F. B. Riemann) és una varietat diferenciable n dimensional en la qual s'ha donat un tensor g de rang 2 covariant, simètric i definit positiu. El tensor g s'anomena tensor mètric. La *geometria riemanniana* és una generalització de la geometria intrínseca de les superfícies a l'espai euclidià. La mètrica d'una varietat de Riemann coincideix amb la mètrica euclidiana fins el primer ordre d'aproximació. La diferència entre les mètriques ve donada per la *curvatura de Riemann* que és la generalització multidimensional de la curvatura de Gauss d'una superfície.

En els fonaments de la geometria riemanniana es troben tres idees: l'existència de mètriques no euclidianes, la curvatura de Gauss i el concepte de varietat de dimensió n.

La geometria riemanniana juga un paper important en la formulació de la teoria general de la relativitat i te aplicació directa en la Mecànica.

Durant el curs es tractaran conceptes fonamentals com connexions, curvatura i geodèsiques. Es treballaran tots aquest conceptes en general però sobretot en superfícies, tan abstractes com inmerses en $\mathbf{R}^3$. Es tractaran les varietats amb curvatura seccional constant i acabarem amb el teorema de Gauss-Bonnet, com exemple de resultat en geometria riemanniana global.

Opcionalment es veuran teoremes de comparació i alguns resultats que relacionen la topologia de les varietats de Riemann amb la topologia.

## Coneixements matemàtics previs

Es convenient tenir aprovades les geometries diferencials de segon i tercer. En la primera lliçó del curs es farà repàs d'alguns conceptes fonamentals.

## Programa

1. Introducció. Defineió de varietat. Exemples. Varietat de Riemann. Tensors i formes diferencials
2. Fibrats vectorials i connexions. Fibrats de referències. Connexions a $\mathbf{R}^n$. Noció de fibrat vectorial. Connexions en fibrats vectotrials. Connexions en varietats: expressió local, transport para.lel. Fibrats principals.
3. Geodèsiques. Primera fòrmula de variació. Aplicació exponencial. Lema de Gauss. Entorns. Teorema de Hopf-Rinow
4. Curvatures. Tensor de curvatura. Curvatura seccional. Altres tensors de curvatura. Significat de l'anu.lació de la curvatura. Camps de Jacobi. Teorema de Hadamard
5. Espais de curvatura constant.
6. Teorema de Gauss Bonnet i aplicacions.
7. Teoremes de comparació (opcional). Teorema de Rauch. Teorema de Toponogov.
8. Relacions entre mètrica i topologia (opcional).

## Bibliografia


- M.P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhausser.
- J. Girbau. *Geometria Diferencial i Relativitat.*. U.A.B.
- J. Cheeger,D.G. Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry.* North-Holland Publishing Company, 1975.
- M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Publish or Perish Inc, 1979.
- M.P. do Carmo. *Geometrí a diferencial de curvas y superficies.* Alianza Universidad, 1990.
- M. Berger, B. Gostiaux. *Géométrie differentielle: variétés, courbes et surfaces.* PUF, 1986.
- Doubrovine, B. and Novikov, S. and Fomenko, A.. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. 1e et 2e partie.* MIR, Moscú, 1985.
- Mishchenko, A. S. and Solovyev, Yu. P. and Fomenko, A. T.. *Problems in differential geometry and topology.* MIR, Moscú, 1985.
- Boothby, W. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, 2nd ed.* Academic Press,1986.
- S. Gudmundsson. *An introduction to Riemannian Geometry.* (http://www.maths.lth.se/matematiklu/personal/sigma/Riemann.ps)


## Professors

Eduardo Gallego (teoria) i Gil Solanes (problemes)

## Avaluació

Es farà un examen final i es tindrà en compte la feina feta en classes de problemes