CÀLCUL INFINITESIMAL

Llicenciatura de Matemàtiques. Curs 2002-2003

OBJECTIUS

El primer objectiu d'aquest curs és que l'alumne assoleixi una idea intuitiva clara del conjunt de nombres reals i de les seves propietats. Després, i com objectiu fonamental pretenem que l'alumne comprengui la noció de pas al límit, tant de successions com de funcions. Això suposa que l'alumne haurà de entendre bé aquesta noció i a més haurà de calcular límits més o menys elementals. Finalment l'alumne haurà de comprendre les nocions bàsiques de l'anàlisi de funcions d'una variable: continuïtat, derivabilitat i integrabilitat. Així mateix haurà de conèixer els teoremes clàssics sobre aquestes qüestions (Bolzano, valor mig, l'Hopital, Taylor, Teorema fonamental del Càlcul ...) i aprendre a utilitzarlos.

PROGRAMA DE L'ASSIGNATURA

1. **Introducció intuïtiva a les nocions de límit i derivada**

   Representació gràfica de funcions. Noció intuïtiva de límit d'una funció en un punt i en el infinit. Creixement d'una funció en un punt, màxims i mínims relatius. Funcions exponencial i logarítmica. Funcions trigonomètriques. Nombres complexos. Successions. Noció intuïtiva de límit d'una successió.

2. **Nombres reals**

   La recta real. Axioma del suprem. Densitat dels racionals. Numerabilitat. Successions de nombres reals. Límit d'una successió. Successions de Cauchy. Subsuccessions. Successions monòtones. El Teorema de Bolzano-Wierstrass. El nombre e.

3. **Funcions i continuïtat**

   Funcions reals de variable real. Límit d'una funció en un punt. Propietats algebraiques dels límits. Límits laterals i en el infinit. Continuïtat d'una funció en un punt. Funcions monòtones i les seves inverses. Teorema de Bolzano. Teorema de Wierstrass

4. **Funcions elementals**

   Les funcions exponencial i logarítmica. Funcions trigonomètriques.

5. **Derivabilitat**

Definició de derivada. Interpretació geomètrica. Propietats algebraiques de la derivada. Regla de la cadena i derivada de la funció inversa. Derivades de les funcions elementals.

Extrems relatius i anul.lació de la derivada. Teoremes de Rolle i del valor mitjà. Monotonía i derivació. Regla de l'Hopital.

6. Convexitat

Definició de convexitat. Derivades successives. Caracterització de la convexitat en termes de la segona derivada.

7. Aproximació polinòmica

Ordre de contacte de dues funcions en un punt. El polinomi de Taylor. Caracterització de extrems relatius. Formules del reste. Noció de funció analítica.

8. Integral de Riemann en una variable.

Construcció de la integral de Riemann. Funcions integrables. Propietats de la integral. Teoremas fonamentals del Càlcul Integral. Teorema del canvi de variables. Integració per parts. Sumes de Riemann. Càlcul d'àrees planes. Longituds de gràfiques, volums i àrees de revolució.

9. Càlcul de primitives.

Primitives elementals . Primitives de funcions racionals i trigonomètriques. Primitives de funcions irracionals.

BIBLIOGRAFIA

1. SPIVAK, M.: Calculus. Editorial Reverté. 1970
2. ORTEGA, J. M.: Introducció a l'Anàlisi Matemàtica. Manuals de la U.A.B. 1990
3. JUAN DE BURGOS : Cálculo infinitesimal de una variable. Editorial McGraw-Hill. 1994

PROFESSORAT

Teoria	Problemes
Francesc Mañosas	Francesc Mañosas
Juan Jesús Donaire	Juan Jesús Donaire

Francesc Mañosas: Despatx C1-308. Horari de consultes a determinar.
Juan Jesús Donaire: Despatx C1-328. Horari de consultes a determinar.

AVALUACIO

El primer punt del programa s'avaluarà mitjançà un examen parcial al mes de novembre que tindrà un pes del 10% en la nota final. Al mes de febrer hi haurà un examen que avaluarà el segon punt del programa. La nota d'aquest examen tindrà un pes del 15% en la nota final. El mes de Juny hi haurà un segon examen parcial que avaluarà la resta del programa. La nota d'aquest darrer examen tindrà un pes del 60%. Independentment d'aquest procés qui ho prefereixi es podrà presentar a un examen global que tindrà un pes del 85%. En qualsevol dels casos el 15% restant s'obtindrà de l'avaluació d'entrega de problemes durant el curs.

I. La recta real

Considerem una recta. Es ben conegut que a cada nombre racional se li pot associar un punt de la recta. El mètode és ben simple. Es comença escollint un punt de la recta que anomenarem l'origen i al qual li assignem el nombre racional 0. Després s'escull un altra punt a la dreta de l'origen que anomenem el punt unitat i li assignem el nombre 1. Al natural n li assignem el punt a la dreta de l'origen tal que el segment que uneix l'origen amb el punt té una llargada que és n vegades la llargada del segment que uneix l'origen amb el punt unitat. Al nombre racional $p/q > 0$ li assignem el punt final d'un segment que comença a l'origen, acaba a la dreta del origen i té de llargada la q-ésima part del segment que comença a l'origen i acaba en el punt que hem assignat al racional p. Al racional $-p/q$ li assignem el punt simètric respecte de l'origen del punt que hem assignat a p/q. Observem que via el Teorema de Tales tota aquesta construcció es pot fer amb regla i compàs.

Observem per altra banda que un cop pres un origen hi ha definida una suma entre punts de la recta que és compatible amb l'assignació que acabem de fer de racionals. Per altra banda si considerem l'ordenació natural de la recta (en la que un punt és més gran que un altre si està situat més a la dreta) aquesta és també compatible amb l'ordenació dels racionals. Hom podria estar temptat de pensar que aquesta assignació omple tots els punts de la recta, és a dir que a cada punt de la recta se li pot associar un racional. Això no és cert. Es a dir hi ha més punts a la recta que els que hom obté amb l'assignació de racionals. Per veure això, considereu el triangle rectangle isòsceles que té per catets el segment unitat. Aleshores l'hipotenusa té per llargada un nombre que elevat al quadrat dóna 2. Aquest nombre correspon a un cert punt de la recta (el punt obtingut al traslladar la hipotenusa al origen de la recta). Veiem que no hi ha cap nombre racional amb aquesta propietat:

Proposició 1. *No hi ha cap nombre racional x, tal que $x^2 = 2$.*

Prova. La prova d'aquest resultat es basa en el fet de que el quadrat d'un nombre parell és parell i el quadrat d'un nombre senar és senar. Suposem per arribar a contradicció que $x^2 = 2$ amb $x = p/q$ racional. Podem suposar $p, q > 0$ i primers entre si. Tindrem aleshores $\frac{p^2}{q^2} = 2$ i per tant $p^2 = 2q^2$. Tindrem doncs que p^2 és parell i per tant p és parell. Podem posar $p = 2r$ amb r natural. Substituint a l'expressió anterior obtenim $4r^2 = 2q^2$ d'on $q^2 = 2r^2$. Però aleshores q^2 és parell i per tant q és parell. Obtenim així que tant p com q són parells, en contradicció amb el fet de que p i q els havíem triat primers entre sí. $\square$

Així doncs els nombres racionals són insuficients per descriure el conjunt de punts de la recta. Per descriure tots els punts de la recta cal una classe més amplia de nombres que anomenarem nombres reals. No farem aquí una construcció rigorosa d'aquest conjunt de nombres. Simplement enunciarem les propietats que els defineixen i ens creurem que aquest conjunt de nombres és una bona representació dels punts de la recta.

Per definir els nombres reals necessitem unes definicions prèvies.

Definició. *Sigui $(K,+,\cdot)$ un cos. Diem que K amb una relació d'ordre total $(\leq)$, és un cos ordenat si es verifiquen les següents propietats:*

(1) Si $x, y, z \in K$ i $x \leq y$ aleshores $x + z \leq y + z$.

(2) Si $x, y \in K$ i $x, \geq 0$ i $y \geq 0$ aleshores $x \cdot y \geq 0$.

Si K és un cos ordenat aleshores sempre es pot pensar que conté $\mathbf{Q}$. En efecte si designem per 0 el element neutre de K respecte la suma i per 1 el element neutre de K respecte el producte podem designar per n al nombre resultant de sumar 1 amb ell mateix n vegades, $1/n$ al seu invers respecte el producte etc...(perquè cal que K sigui un cos ordenat per poder seguir aquest procediment?)

Definició. *Sigui K un cos ordenat i $A \subset K$. Diem que A està acotat superiorment (resp. inferiorment) si existeix $M \in K$, que anomenarem cota superior (resp. cota inferior) de A, tal que $x \leq M$ (resp. $x \geq M$) per tot $x \in A$.*

Definició. *Sigui K un cos ordenat i $A \subset K$ acotat superiorment (resp. inferiorment). Diem que α cota superior (resp. inferior) de A és el suprem (resp. ínfim) de A si qualsevol cota superior (resp. inferior) β verifica $\beta \geq \alpha$ (resp. $\beta \leq \alpha$). El suprem de A i el ínfim de A, quan existeixin, els designem per* $\sup A$ *i* $\inf A$ *respectivament.*

Clarament el suprem d'un conjunt si existeix és únic. En un cos ordenat qualsevol el suprem d'un conjunt acotat superiorment no té per què existir, com mostra el següent exemple.

Exemple. *A $\mathbf{Q}$ considerem el següent subconjunt:*

$$A = \{x \in \mathbf{Q} : \ x^2 < 2, \ x > 0\}.$$

A està acotat superiorment però no té suprem.

Prova. Veiem que A està acotat superiorment. De fet qualsevol nombre y tal que $y > 0$, $y^2 > 2$ és una fita superior. Denotem per B aquest conjunt. Observem que com que no hi ha nombres racionals x amb $x^2 = 2$, qualsevol racional positiu pertany o bé a A o bé a B. Suposem que A té suprem i designem-lo per z. Hi ha dues possibilitats:

(1) $z \in A$. Veurem que això no és possible. Sigui $0 < \varepsilon < 1$ tal que $\varepsilon < \frac{2-z^2}{2z+1}$. Aleshores

$$(z+\epsilon)^2 = z^2 + 2z\varepsilon + \varepsilon^2 = z^2 + \varepsilon(2z+\varepsilon) < z^2 + \varepsilon(2z+1) < z^2 + 2 - z^2 = 2.$$

Aleshores $(z+\varepsilon) \in A$ el que contradiu que z sigui una cota superior de A.

(2) $z \in B$. Això tampoc és possible. Sigui $0 < \varepsilon < z$ tal que $\varepsilon < \frac{z^2-2}{2z}$. Tindrem

$$(z-\varepsilon)^2 = z^2 - 2z\varepsilon + \varepsilon^2 > z^2 - 2z\varepsilon > z^2 + 2 - z^2 = 2.$$

Així $(z-\varepsilon) \in B$ el que contradiu que z sigui la més petita de les cotes superiors de A.

Concloem doncs que A no té suprem. □

El següent teorema no el demostrarem i simplement ens el creurem. Podeu trobar-ne la demostració al Spivak (Capítol 28).

Teorema 2. *Existeix un únic cos ordenat amb la propietat de que tot conjunt acotat superiorment té suprem.*

"El" cos ordenat que té la propietat de que tot conjunt acotat superiorment té suprem l'anomenem el cos dels nombres reals i el denotem per $\mathbf{R}$.

Exercici. *Demostreu que a $\mathbf{R}$ tot subconjunt acotat inferiorment té ínfim.*

Definició. *Donats $x < y \in \mathbf{R}$ definim:*

$$\begin{array}{rl} (x,y) = & \{z \in \mathbf{R} : \ x < z < y\} \\ [x,y] = & \{z \in \mathbf{R} : \ x \le z \le y\} \\ [x,y) = & \{z \in \mathbf{R} : \ x \le z < y\} \\ (x,y] = & \{z \in \mathbf{R} : \ x < z \le y\} \end{array}.$$

A aquests conjunts els anomenem respectivament interval obert, interval tancat i intervals semioberts d'extrems x i y.

El suprem d'un conjunt té la següent propietat que farem servir sovint.

Lema 3. Si $\alpha = \sup A$ aleshores per tot $\varepsilon > 0$ l'interval $(\alpha - \varepsilon, \alpha]$ conté punts de A.

Prova. Es deixa al lector. Enuncieu també la propietat corresponent per l'ínfim. □

Com tot cos ordenat $\mathbf{R}$ conté a Q. Conté algun element més ja que $\mathbf{R}$ té la propietat del suprem i $\mathbf{Q}$ no. Els nombres reals que no són racionals els anomenem irracionals. (Exercici: Adapteu el que hem fet per veure que el subconjunt A de $\mathbf{Q}$ no té suprem, per provar que el suprem de A en els reals, que podem seguir anomenant z verifica que $z^2 = 2$. Aquest nombre irracional el denotem per $\sqrt{2}$). Es natural preguntar-se com estan barrejats els racionals i els irracionals. Per respondre aquesta pregunta abans hem d'establir el que es coneix com la propietat arquimediana de $\mathbf{R}$.

Proposició 4. *Els naturals no estan acotats superiorment a* $\mathbf{R}$.

Prova. Suposem que $\mathbf{N}$ està acotat superiorment i sigui $\alpha = \sup \mathbf{N}$. Aleshores, pel Lema 3, $(\alpha - 1/2, \alpha]$ conté un natural z. Però aleshores $\alpha < z + 1 \in \mathbf{N}$. Contradicció amb el fet de que $\alpha = \sup \mathbf{N}$. $\square$

Proposició 5. *Entre dos nombres reals sempre hi ha un racional i un irracional.*

Prova. Siguin $x, y \in \mathbf{R}$. dos nombres reals. Per la proposició anterior podem triar $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > \frac{1}{y-x}$. Sigui ara un nombre natural m tal que $m - 1 \leq nx < m$. Llavors tindrem:

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{n} = \frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}$$

d'on resulta

$$x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + y - x = y.$$

Obtenim així un racional entre x i y. Per trobar un irracional entre x i y, sigui ara $z > 0$ un irracional qualsevol i considerem l'interval (xz, yz). Pel que hem vist abans hi ha un racional $s \in (xz, yz)$. Aleshores $\frac{s}{z} \in (x, y)$ i $\frac{s}{z}$ és irracional. $\square$

Definició. *El valor absolut d'un nombre real* x *que denotem per* $|x|$ *es defineix com*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x > 0, \\ -x & si\ x < 0. \end{cases}$$

El valor absolut es una funció important perquè de fet ens permet donar una expressió de la distància entre dos punts de la recta. En efecte sembla natural definir la distància entre dos punts x, y com $|x - y|$.

Lema 6. *El valor absolut té les següents propietats:*

(1) $|x| \geq 0$, *i* $|x| = 0$ *si i només si* $x = 0$.

(2) $|xy| = |x||y|$

(3) Desigualtat triangular:

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

per tot $x, y \in \mathbf{R}$.

Prova. Es deixa al lector $\square$

Definició. *Un entorn de* $x \in \mathbf{R}$ *és un interval obert qualsevol que contingui* x. *Un semientorn de* x *es un interval del tipus* $(a, x]$ *o* $[x, b)$.

Sovint els entorns es prenen centrats en el punt és a dir del tipus $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ amb $\epsilon > 0$. Fixem-nos que aquest tipus d'entorns estan constituïts per els punts que estan a distància més petita que ε de x. Es a dir

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y \in \mathbf{R} : \ |y-x| < \varepsilon\}.$$

Com ja sabem a cada nombre racional se li pot assignar una successió de nombres naturals (més petits o iguals que 9) que a partir d'un cert lloc és periòdica. Es el que coneixem com a desenvolupament decimal d'un nombre racional. Aquesta assignació es pot fer també per qualsevol nombre real. Es a dir a cada nombre real se li pot assignar una successió de nombres naturals més petits o iguals que nou que ara no té perquè ésser periòdica. De fet serà periòdica només en el cas de que el nombre considerat sigui racional. Així doncs podeu pensar els nombres reals com les expressions decimals generals i els nombres racionals com les expressions decimals periòdiques. No provarem aquí aquest teorema, podeu trobar-ne l'enunciat precís i la demostració al llibre de J. Ortega (Teorema 1.16).

Veurem ara que de fet hi ha molts més irracionals que racionals. Per veure-ho necessitem introduir un nou concepte.

Definició. *Sigui A un conjunt. Diem que A és numerable si existeix una aplicació bijectiva de A en $\mathbf{N}$.*

Òbviament un conjunt numerable ha de tenir un nombre infinit d'elements. Ara bé, com veurem aviat, no tot conjunt amb un nombre infinit d'elements és numerable. Veiem primer un resultat que en un primer moment pot sorprendre.

Proposició 7. *Tot subconjunt infinit de $\mathbf{N}$ és numerable*

Prova. Sigui $B \subset \mathbf{N}$ amb infinits elements. Ordenem els elements de B de més petit a més gran. Aleshores l'aplicació que assigna a cada element de B el lloc que ocupa en aquesta ordenació és una aplicació bijectiva de B en $\mathbf{N}$. $\square$

Corol.lari 8. *Tot subconjunt infinit d'un conjunt numerable és numerable*

Prova. Es deixa al lector $\square$

Corol.lari 8. *Sigui A un conjunt amb infinits elements. Perquè A sigui numerable, n'hi ha prou amb que existeixi una aplicació injectiva de A en $\mathbf{N}$.*

Prova. Sigui $f : A \longrightarrow \mathbf{N}$. Aleshores $f(A)$ és un subconjunt infinit. Sigui g l'aplicació bijectiva de $f(A)$ en $\mathbf{N}$ que ens assegura la proposició 7. Tindrem que $g \circ f$ és una bijecció de A en $\mathbf{N}$ i per tant A és numerable. $\square$

Proposició 9. *Si A i B són numerables, aleshores $A \times B$ també ho és.*

Prova. Sigui $i : A \longrightarrow \mathbf{N}$ i $j : B \longrightarrow \mathbf{N}$ bijeccions i considerem l'aplicació F :

$A \times B \longrightarrow \mathbf{N}$ definida per

$$F(a,b) = 2^{i(a)}3^{j(b)}.$$

Noteu que $F(a,b) = F(c,d)$ implica que $2^{i(a)}3^{j(b)} = 2^{i(c)}3^{j(d)}$ i per l'unicitat de descomposició en factors primers això implica que $i(a) = i(c)$ i $j(b) = j(d)$. Com que i i j són injectives obtenim que $(a,b) = (c,d)$. Per tant F és injectiva i $A \times B$ és numerable. □

Teorema 10. $\mathbf{Q}$ *és numerable.*

Prova. A cada nombre racional li podem assignar de manera única una parella de nombres naturals primers entre sí i un signe. Considerem l'aplicació $F : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{N}$ definida per

$$F(x) = \begin{cases} 2^p3^q & \text{si } x = p/q \quad \text{amb} \quad p, q > 0, \;\; p \;\; \text{i} \;\; q \;\; \text{primers entre sí ,} \\ 2^p3^q5 & \text{si } x = -p/q \quad \text{amb} \quad p, q > 0, \;\; p \;\; \text{i} \;\; q \;\; \text{primers entre sí.} \end{cases}$$

Pels mateixos arguments usats en la proposició anterior F és injectiva i per tant $\mathbf{Q}$ és numerable. □

Teorema 11. $\mathbf{R}$ *no és numerable.*

Prova. N'hi ha prou amb veure que l'interval $(0,1)$ no és numerable. Usarem la representació decimal dels nombres reals. Així identifiquem els nombres reals amb les successions de naturals mes petits o iguals que 9. Suposem que hi hagués una bijecció $j : \mathbf{N} \longrightarrow (0,1)$. Tindrem doncs una llista:

$$\begin{array}{ll} j(1) & = a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots \\ j(2) & = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots \\ j(3) & = a_1^3 a_2^3 a_3^3 \ldots \\ \cdot & = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot & = \ldots\ldots\ldots \\ j(n) & = a_1^n a_2^n a_3^n \ldots \\ \cdot & = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Considerem ara el següent desenvolupament decimal $b_1, b_2, b_3 \ldots, b_n \ldots$ on

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i^i \neq 1, \\ 2 & \text{si} \quad a_i^i = 1. \end{cases}$$

Es clar que aquest desenvolupament decimal no està a la llista i per tant el nombre real que representa no està a la imatge de j. □

Problemes.

1. Trobeu tots els nombres x per als quals

(a) $(x-1)(x-3) > 0$.

(b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$.

(c) $\frac{x-1}{x+1} > 0$.

(d) $|x-1| + |x-2| > 1$.

(e) $|x-1| + |x+1| < 2$.

(f) $|x-1| > |x+1|$.

(g) $|x^2 - 3x| \leq 2$.

(h) $(x-3)^2 \leq 1$.

(i) $|\frac{x+2}{x+4}| + |(|3x-1| - |5-2x|)| > 1$.

2. Trobeu i dibuixeu els parells $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ que satisfan

$$\begin{array}{ll} |x| = |y| & y < \frac{1}{x^2+1} \\ |xy| = 2 & y^2 + 1 \leq x^2 + 1 \\ |x| + |y| \leq 1 & |x| - |y| = 2. \end{array}$$

3. Demostreu les afirmacions següents

(a) $|x-y| \leq |x| + |y|$.

(b) $|x| - |y| \leq |x-y|$.

(c) $|(|x| - |y|)| \leq |x-y|$.

(d) $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$.

4. Demostreu que si $0 < a < b$, llavors

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Demostreu també que $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.

5. Doneu expressions equivalents a les següents, en les quals no aparegui cap valor absolut.

(a) $|a+b| - |b|$.

(b) $|(|x| - 1)|$.

(c) $|x| - |x^2|$.

(d) $x - |(x - |x|)|$.

6. Demostreu que

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|y-x|}{2}$$
$$\min(x,y) = \frac{x+y-|y-x|}{2}.$$

7. (*)

(a) Demostreu que:

$$(x+y)^2 = x^2+y^2 \quad \text{implica} \quad x=0 \quad \text{o bé} \quad y=0$$
$$(x+y)^3 = x^3+y^3 \quad \text{implica} \quad x=0 \quad \text{o bé} \quad y=0 \quad \text{o bé} \quad x=-y.$$

(b) Utilitzant el fet que $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 \geq 0$ demostreu que $4x^2+6xy+4y^2 \geq 0$.

(c) Utilitzeu l'anterior apartat per determinar quan $(x+y)^4 = x^4+y^4$.

(d) Determineu quan $(x+y)^5 = x^5+y^5$.

8. Demostreu utilitzat la unicitat de descomposició en primers que si $n \in \mathbf{N}$ i $\sqrt[k]{n} \in \mathbf{Q}$ aleshores $n = m^k$ per a cert $m \in \mathbf{N}$.

9. Demostreu que si x satisfà

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

per a certs enters $a_{n-1} \ldots a_0$, llavors x és irracional o enter.

10. Demostreu les fórmules següents per inducció:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2.$

(c) $2^n \leq (n+1)!.$

11. Si $0 \leq k \leq n$, el coeficient binomial $\binom{n}{k}$ es defineix com:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(a) Demostreu que per $k = 1, \ldots, n$ es té

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

(b) Demostreu per inducció que $\binom{n}{k}$ és un nombre natural.

(c) Demostreu per inducció el teorema del binomi: si a i b son nombres qualsevol i n és un nombre natural, llavors

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

12. (*)

(a) Demostreu que si m i n són nombres naturals i $\frac{m^2}{n^2} < 2$, llavors $0 < \frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}$.

(b) Demostreu els mateixos resultats amb tots els signes de desigualtat en sentit contrari.

(c) Demostreu que si $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$, llavors hi ha un altra racional $\frac{m'}{n'}$ que satisfà $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} < \sqrt{2}$.

13. Demostreu la desigualtat de Bernoulli: Si $h > -1$, llavors $(1+h)^n \geq 1 + nh$.

14. Proveu que si un conjunt $A \subset \mathbf{R}$ conté una de les seves cotes superiors, aleshores aquesta cota superior és el suprem.

15. Considerem la següent relació d'ordre definida en el conjunt $\mathbf{N}$:

$$n \leq m \Longleftrightarrow n \quad \text{és un divisor de} \quad m.$$

Determineu els subconjunts de $\mathbf{N}$ que estan acotats superior i inferiorment i quin és el seu suprem i el seu ínfim.

16. Trobeu el suprem i el ínfim (quan existeixin) dels conjunts següents. Decidiu també quins conjunts tenen un element màxim o un element mínim (és a dir decidiu quan el suprem o el ínfim pertanyen al conjunt).

(a) $\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbf{N}\}$.

(b) $\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$.

(c) $\{x \in \mathbf{Q} : \ 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

(d) $\{x : \ x^2 + x + 1 \geq 0\}$.

(e) $\{x : \ x < 0 \text{ i } x^2 + x - 1 < 0\}$.

(f) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n : \ n \in \mathbf{N}\}$.

(g) $\{\frac{3n^2+5n+16}{n^2+1000} : \ n \in \mathbf{N}\}$.

(h) $\{3x^2 - 10x + 1 : \ x \in \mathbf{R}\}$.

17. Demostreu que per a qualsevol subconjunts A i B de $\mathbf{R}$ es té

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B \qquad \inf(A+B) = \inf A + \inf B \ .$$

18. Proveu que donat $z \in \mathbf{R}$, existeix un únic enter $n \in \mathbf{Z}$ tal que $n \leq z < n+1$.

19. Proveu que donat $z \in \mathbf{R}$ existeix un únic $\tilde{z}$ tal que $0 \leq \tilde{z} < 1$ i $z - \tilde{z} \in \mathbf{Z}$. Si denotem $\tilde{z}$ per $D(z)$ demostreu que si x, y son tals que $D(x) + D(y) < 1$ aleshores $D(x+y) = D(x) + D(y)$.

20. Demostreu que els següents conjunts són numerables:

(a) El conjunt dels intervals tancats amb extrems racionals.

(b) Qualsevol conjunt infinit d'intervals oberts disjunts dos a dos.

21. (*) Un nombre real es diu algebraic si es arrel d'un polinomi a coeficients racionals. Demostreu que el conjunt de nombres algebraics és numerable.

22. (**) Si en el pla dibuixem una col.lecció de 8's que no es tallin l'un amb l'altre demostreu que n'hi ha com a màxim una quantitat numerable. En canvi podeu dibuixar una quantitat no numerable de 0's que no es tallen.

II. Successions

1. Definicions i noció de límit.

Una successió de nombres reals és una col.lecció de nombres reals numerats. Més formalment es defineix una successió com una aplicació $a : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$. Al nombre $a(n)$ es designa usualment per a_n. El que segueixen son diversos exemples de successions:

$$
\begin{array}{l}
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots, n, \ldots \\
1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, \ldots, 1/n, \ldots \\
-1, 1, -1.1, -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots \\
1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots \\
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots, \\
1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots
\end{array}
$$

Diem que la successió $\{a_n\}$ està acotada superiorment (resp. acotada inferiorment) si existeix un nombre real K de manera que $a_n \leq K$ (resp. $a_n \geq K$) per tot $n \in \mathbf{N}$. Diem que la successió està acotada si està acotada superior i inferiorment. Per que això passi n'hi ha prou amb l'existència d'un nombre real K positiu tal que $|a_n| < K$ per tot $n \in \mathbf{N}$. (Exercici: Investigueu si els exemples anteriors són o no successions acotades)

Diem que la successió a_n té límit l i escrivim $\lim a_n = l$, si per qualsevol quantitat positiva tots els termes de la successió tret d'un nombre finit disten de l menys que aquesta quantitat. Més formalment diem que $\lim a_n = l$ si per tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ per tot $n > n_0$. Quan una successió té límit diem que és convergent (Exercici: investigueu si les successions anteriors són convergents). Com veurem en el següent lema el limit d'una successió si existeix és únic.

Lema 1. *El límit d'una successió si existeix és únic*

Prova. Suposem que a i b són límits de la successió a_n i suposem per arribar a contradicció que $a \neq b$. Considerem $0 < \varepsilon < |a - b|/2$. Aplicant la definició de límit tindrem que $|a_n - a| < \varepsilon$ per $n > n_1$ i $|a_n - b| < \varepsilon$ per $n > n_2$. Així prenent $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ tindrem que $|a_n - a| < \varepsilon$ i $|a_n - b| < \varepsilon$. Obtenim així per $n > n_0$,

$$|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon < |a - b|$$

el que és un absurd. $\square$

Proposició 2. $\lim \frac{1}{n} = 0$

Prova. Considerem $\varepsilon > 0$. Sigui $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Tindrem si $n > n_0$,

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

$\square$

Lema 3. *Si $\{a_n\}$ és convergent aleshores està acotada. A més si $k < a_n < K$ per tot $n \in \mathbf{N}$ llavors $k \leq \lim a_n \leq K$.*

Prova. Sigui $l = \lim a_n$. Prenent $\varepsilon = 1$ a la definició de límit, existirà n_0 tal que $|a_n - l| < 1$ per tot $n > n_0$. Així doncs $l - 1 < a_n < l + 1$ si $n > n_0$. Considerem ara $k = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, l - 1\}$ i $K = \max\{a_1, a_2, \ldots a_{n_0}, l + 1\}$. Clarament tindrem $k \leq a_n \leq K$ per tot $n \in \mathbf{N}$ i per tant $\{a_n\}$ està acotada.

Per provar la segona part del lema suposem que $a = \lim a_n > K$ i sigui $\varepsilon < \frac{a-K}{2}$. Sigui n_0 tal que $|a_n - a| < \epsilon$ per $n > n_0$. Això implica que $a_n > K$ per $n > n_0$; així obtenim una contradicció. Per tant $a \leq K$. La prova de que $a \geq k$ és similar. $\square$

Un cas molt particular de successions no acotades es el següent. Diem que la successió $\{a_n\}$ té límit infinit, i escrivim $\lim a_n = \infty$ si per tot $K > 0$ existeix n_0 tal que $a_n > K$ per tot $n > n_0$. (Exercici: Doneu la definició de $\lim a_n = -\infty$)

Les successions es poden sumar i multiplicar de manera obvia. Donades dues successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ es defineix la successió suma com la successió que té de terme enèsim la suma de termes enèsims. Formalment

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}.$$

Definiu vosaltres mateixos el producte de successions.

Lema 4. *Siguin $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ successions convergents amb límits a i b respectivament. Aleshores els següents fets són certs:*

(1) Les successions $\{a_n + b_n\}$ i $\{a_n b_n\}$ són convergents i $\lim a_n + b_n = a + b$ i $\lim a_n b_n = a.b$

(3) Si $a \neq 0$ aleshores $a_n \neq 0$ per n prou gran i la successió $\{\frac{1}{a_n}\}$ és convergent i $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

Prova. (1) Considerem $\varepsilon > 0$. Sigui n_1 tal que $|a_n - a| < \varepsilon/2$ quan $n > n_1$. Sigui n_2 tal que $|b_n - b| < \varepsilon/2$ si $n > n_2$. Considerem ara $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Tindrem per $n > n_0$ que

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

La demostració de que $\lim a_n b_n = a.b$ és un xic més complicada. Com que a_n i b_n són convergents pel lema anterior existeixen constants positives K_1 i K_2 de manera que $|a_n| < K_1$ i $|b_n| < K_2$ per tot $n \in \mathbf{N}$. Considerem $\varepsilon > 0$ i siguin n_1 i n_2 tals que $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K_2}$ si $n > n_1$ i $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K_1}$ si $n > n_2$. Sigui $n > \max(n_1, n_2)$, tindrem:

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < K_1 \frac{\varepsilon}{2K_1} + K_2 \frac{\varepsilon}{2K_2} = \varepsilon.$$

(2) Suposem per exemple $a > 0$. Sigui $\varepsilon < a/2$ i n_0 tal que $|a_n - a| < \varepsilon < a/2$. Tindrem doncs si $n > n_0$ que $a_n - a > -a/2$ i per tant $a_n > a/2 > 0$. Així doncs per n prou gran té sentit considerar la successió $1/a_n$ i $1/a_n < 2/a$. Considerem $\varepsilon > 0$ i sigui $n_1 > n_0$ tal que $|a_n - a| < a^2/2\varepsilon$ quan $n > n_1$. Tindrem

$$|1/a_n - 1/a| = |1/a_n||1/a||a_n - a| < \frac{2}{a^2} \frac{a^2}{2} \varepsilon = \varepsilon,$$

per $n > n_1$. □

Ja hem vist que tota successió convergent està acotada. El recíproc no és pas cert en general (sabríeu donar un contraexemple?). El següent teorema afirma que el recíproc es cert en certes condicions. Per enunciar aquest teorema necessitem introduir un nou concepte. Diem que la successió $\{a_n\}$ és *monòtona creixent* si $a_n \leq a_{n+1}$ per tot $n \in \mathbf{N}$. Diem que la successió $\{a_n\}$ és *monòtona decreixent* si $a_n \geq a_{n+1}$ per tot $n \in \mathbf{N}$. Finalment diem que la successió $\{a_n\}$ és *monòtona* si és o bé monòtona creixent o bé monòtona decreixent.

Teorema 5. *Tota successió monòtona i acotada és convergent*

Prova. Sigui $\{a_n\}$ monòtona i acotada. Suposem per exemple que $\{a_n\}$ és monòtona creixent (feu vosaltres la demostració en l'altra cas). Sigui $l = \sup\{a_n\}$ que existeix ja que la successió està acotada. Provarem que $l = \lim a_n$. En efecte, considerem $\varepsilon > 0$. Observeu que a l'interval $(l - \varepsilon, l]$ ha d'haver-hi algun terme de la successió. Si no hi hagués cap terme de la successió aleshores $l - \varepsilon$ seria una fita superior de $\{a_n\}$ més petita que l en contradicció amb el fet de que l és el suprem de $\{a_n\}$. Sigui n_0 amb $a_{n_0} \in (l - \varepsilon, l]$. Usant que la successió es creixent i que l és una fita superior obtenim que per $n > n_0$

$$l - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq l.$$

Així doncs $|a_n - l| < \varepsilon$ per $n > n_0$. □

El següent lema és útil per provar la convergència de successions.

Lema 6.

(1) Siguin $\{a_n\}, \{b_n\}$ *i* $\{c_n\}$ *tres successions verificant* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *per tot* $n \in \mathbf{N}$. *Suposem a més que* $\lim a_n = \lim c_n = l$. *Aleshores* $\{b_n\}$ *és convergent i* $\lim b_n = l$.

(2) Siguin $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *dues successions convergents verificant que* $a_n \leq b_n$ *per tot* $n \in \mathbf{N}$. *Aleshores* $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Prova. Es deixa al lector. □

En el següent lema s'estudia la convergència d'algunes successions.

Lema 7.

(1) Si $p > 0$, $\lim \frac{1}{n^p} = 0$.

(2) Si $p > 0$, $\lim \sqrt[n]{p} = 1$.

(3) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

(4) Si $x > 1$ *i* $\alpha \in \mathbf{R}$, $\lim \dfrac{n^\alpha}{x^n} = 0$.

(5) Si $x < 1$, $\lim x^n = 0$.

Prova. (1) Considerem $\varepsilon > 0$ i sigui $n_0 > (1/\varepsilon)^{1/p}$. Tindrem $0 < \frac{1}{n^p} < \frac{1}{n_0^p} < \varepsilon$ si $n > n_0$.

(2) Considerem primer el cas $p > 1$. Posem $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$ i hem de provar que $\lim x_n = 0$. Observeu que com que $p > 1$, $x_n > 0$. Tindrem:

$$p = (1 + x_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x_n + \ldots + \binom{n}{n} x_n^n > 1 + n x_n,$$

i per tant

$$0 < x_n < \frac{p-1}{n}.$$

Aplicant el lema 6 obtenim $\lim x_n = 0$. Si $p = 1$ el resultat és evident. Si $p < 1$, $1/p > 1$ i aplicant el que hem vist a $\sqrt[n]{1/p}$ hom obté el resultat.

(3) Posem $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ i haurem de provar que $\lim x_n = 0$. Observeu que $x_n > 0$ quan $n > 1$. Tindrem

$$n = (1 + x_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x_n + \binom{n}{2} x_n^2 \ldots + \binom{n}{n} x_n^n > \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

i per tant

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Així doncs aplicant el Lema 6 i (1) obtenim que $\lim x_n = 0$.

(4) Sigui $k > \alpha$, natural i $n \geq 2k$. Posem $x = 1 + p$, amb $p > 0$. Tindrem:

$$\begin{aligned} x^n = & \ (1+p)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} p + \ldots + \binom{n}{k} p^k + \ldots + \binom{n}{n} p^n > \binom{n}{k} p^k = \\ = & \ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} p^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{p^k}{k!}. \end{aligned}$$

Obtenim així que per n prou gran

$$0 < \frac{n^\alpha}{x^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha - k}.$$

Com que $\alpha - k < 0$ aplicant (1) i el Lema 6 obtenim el resultat.

(5) Es un cas particular de (4) prenent $\alpha = 0$. □

2. El nombre e.

Sigui

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

El nostre primer objectiu és demostrar que S_n és convergent.

Lema 8. *S_n és convergent.*

Prova. Observem primer que $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n!} > 0$ i per tant és monòtona creixent. Cal veure doncs que està acotada. Tindrem:

$$0 < S_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

□

Al límit de la successió S_n l'anomenem el nombre e. Observeu que $2 < e \leq 3$. Sovint el nombre e s'introdueix també com el límit de la successió $T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Veiem-ho.

Lema 9. $\lim T_n = e$.

Prova. Començarem veient que T_n és creixent. Per això necessitarem desenvolupar un xic T_n.

$$\begin{aligned}
T_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \dots \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)+\dots(n-(n-2))}{(n-1)!}\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)(n-2)+\dots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \dots \\
&\dots + \frac{1}{(n-1)!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{n-2}{n}) + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n})
\end{aligned}$$

D'aquesta expressió deduïm que $T_{n+1} > T_n$ ja que els sumands que apareixen a T_{n+1} són més grans i n'hi ha un de més. Per tant la successió T_n és monòtona creixent. Per altra banda també de l'expressió anterior deduïm que $T_n \leq S_n \leq 3$. Per tant T_n és convergent i si anomenem T el seu límit tindrem

$$T = \lim T_n \leq \lim S_n = e.$$

Veiem ara que $T \geq e$. Per això fixem n i considerem $m > n$. Tindrem:

$$\begin{aligned}
T_m = \quad & 2 + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{m}) + ..\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{m})..(1-\frac{n-1}{m}) + ..\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{m})\dots(1-\frac{m-1}{m}) > \\
& 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{m}) + \dots\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{m})\dots(1-\frac{n-1}{m}).
\end{aligned}$$

Si ara en aquesta desigualtat fixem n i passem al límit respecte m obtenim:

$$T \geq S_n.$$

Passant ara al límit aquesta última desigualtat obtenim

$$T \geq e.$$

□

Teorema 10. *El nombre e és irracional.*

Prova. Comencem per avaluar l'error comés al aproximar e per S_n. Sigui $m > n$, tindrem:

$$\begin{aligned}
S_m - S_n = \quad & \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{m!} = \\
& \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(m)}\right) < \\
& \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{m-n}}\right) = \\
& \frac{1}{n!n}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{m-n}}\right) < \frac{1}{n!n}.
\end{aligned}$$

Passant al límit aquesta desigualtat respecte m obtenim

$$0 < e - S_n \leq \frac{1}{n!n}.$$

Fent $n = 2$ en aquesta desigualtat obtenim que

$$2 < e \leq 2.75 < 3.$$

Suposem ara que e fos racional. Escollim $p, m \in \mathbf{N}$ tals que $e = \frac{p}{m}$. Observem que $m \geq 2$ ja que $2 < e < 3$ i per tant e no pot ser enter. Tindrem:

$$S_m < e = \frac{p}{m} \leq S_m + \frac{1}{m!m}.$$

Multiplicant aquesta desigualtat per $m!$ obtenim:

$$m!S_m < m!\frac{p}{m} = (m-1)!p \leq m!S_m + \frac{1}{m} < m!S_m + 1.$$

Observem que $m!S_m$ és enter i obtenim així que $(m-1)!p$ és un enter situat entre dos enters consecutius; contradicció □

3. Subsuccessions i punts d'acumulació.

Sigui $\{a_n\}$ una successió de nombres reals i sigui

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$$

una successió creixent de naturals. A la successió $\{a_{k_n}\}$ que té per terme enèsim a_{k_n} en diem una *subsuccessió o successió parcial* de $\{a_n\}$.

Lema 11. *Si* $\lim a_n = l$, *llavors qualsevol successió parcial de* $\{a_n\}$ *té també límit* l.

Prova. Sigui $\{a_{k_n}\}$ una successió parcial de $\{a_n\}$ i $\varepsilon > 0$. Sigui n_0 tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ si $n > n_0$. Com que $k_n \geq n$ tindrem que si $n > n_0$ aleshores $k_n \geq n > n_0$ i per tant $|a_{k_n} - l| < \varepsilon$. □

Diem que a és un *punt d'acumulació de* a_n si per tot $\varepsilon > 0$ i per tot $n_0 \in \mathbf{N}$ existeix $n > n_0$ amb $|a_n - a| < \varepsilon$. Observem que la diferència essencial entre aquesta definició i la de límit és que en la definició de límit es demana que tots els termes a partir d'un cert lloc estigui a distància més petita que ε del límit, mentre que en la definició de punt d'acumulació només es demana que hi hagi termes tant enllà com vulguem (però no pas tots a partir d'un cert lloc) a distància més petita que ε

del punt d'acumulació. Com veurem en la següent proposició els punts d'acumulació d'una successió són els límits de les seves parcials.

Proposició 12. *a és un punt d'acumulació de $\{a_n\}$ si i només si existeix $\{a_{k_n}\}$ parcial de $\{a_n\}$ amb* $\lim a_{k_n} = a$.

Prova. Sigui $\{a_{k_n}\}$ una parcial de $\{a_n\}$ amb $\lim a_{k_n} = a$. Veiem que a és un punt d'acumulació de $\{a_n\}$. Considerem $\varepsilon > 0$ i $n_0 \in \mathbf{N}$. Com que $\lim a_{k_n} = a$ tindrem que existeix n_1 de manera que si $n > n_1$ aleshores $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$. Prenem doncs $n > \max(n_1, n_0)$. Tindrem que $k_n \geq n > n_0$ i $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$.

Provem ara el recíproc. Sigui a punt d'acumulació de $\{a_n\}$ i prenem k_1 tal que $|a_{k_1} - a| < 1$. Prenem ara $k_2 > k_1$ amb $|a_{k_2} - a| < 1/2$. Inductivament prenem $k_n > k_{n-1}$ tal que $|a_{k_n} - a| < 1/n$. Afirmem que la subsuccessió a_{k_n} té límit a. En efecte sigui $\varepsilon > 0$ i n_0 tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Tindrem si $n > n_0$ que

$$|a_{k_n} - a| < 1/n < 1/n_0 < \varepsilon.$$

$\square$

Corol.lari 13. *Una successió convergent té el seu límit com a únic punt d'acumulació.*

Prova. Es una conseqüència directa del Lema 11 i la Proposició 12. $\square$

El recíproc d'aquest Corol.lari no és pas cert com mostra la següent successió:

$$1, 1, 2, 1/2, 3, 1/3, 4, 1/4, \ldots, n, 1/n, \ldots.$$

Aquesta successió té 0 com a únic punt d'acumulació però no és pas convergent (no està acotada). Veurem més endavant que si la successió està acotada aleshores ser convergent és equivalent a només tenir un punt d'acumulació. El nostre proper objectiu es enunciar i provar el Teorema de Bolzano-Wierstrass.

Proposició 14. *Tota successió té una parcial monòtona.*

Prova. Donada $\{a_n\}$ una successió diem que n és un punt cim de la successió si $a_m < a_n$ per tot $m > n$. Hi ha dues possibilitats

(1) La successió té infinits punts cim. En aquest cas si $k_1 < k_2 < \ldots < k_n \ldots$ és la successió de punts cim aleshores $a_{k_1} > a_{k_2} > \ldots > a_{k_n} > \ldots$ i obtenim així una parcial monòtona decreixent de $\{a_n\}$.

(2) Només hi ha un nombre finit de punts cim. En aquest cas sigui m el últim punt cim ($m = 0$ si no n'hi ha cap) i prenem $k_1 > m$. Com que k_1 no és un punt cim existeix $k_2 > k_1$ tal que $a_{k_2} \geq a_{k_1}$. Com que k_2 no és un punt cim, existeix $k_3 > k_2$ amb $a_{k_3} \geq a_{k_2}$. Inductivament construïm $k_n > k_{n-1}$ amb $a_{k_n} \geq a_{k_{n-1}}$. Obtenim així una parcial de $\{a_n\}$ monòtona creixent.

$\square$

Corol.lari 15 (Teorema de Bolzano-Wierstrass). *Tota successió de punts d'un interval tancat té una parcial convergent a un punt del interval.*

Prova. Sigui $\{a_n\}$ amb $a_n \in [a,b]$ per tot $n \in \mathbf{N}$. Per la Proposició anterior $\{a_n\}$ té una parcial monòtona $\{a_{k_n}\}$ que estarà acotada ja que $a \leq a_{k_n} \leq b$ per tot $n \in \mathbf{N}$. Per el Teorema 5, $\{a_{k_n}\}$ és convergent i tindrem que $a \leq \lim a_{k_n} \leq b$. $\square$

El Teorema de Bolzano-Wierstrass té els següents enunciats equivalents:
Tota successió acotada té alguna parcial convergent.
Tota successió acotada té algun punt d'acumulació.

Proposició 16. *Sigui $\{a_n\}$ una successió acotada. Aleshores $\{a_n\}$ és convergent si i només si té un únic punt d'acumulació.*

Prova. Si a_n té límit ja hem vist al Corol.lari 13 que el seu límit és l'únic punt d'acumulació de la successió. Provem el recíproc. Sigui $\{a_n\}$ amb un únic punt d'acumulació a, i suposem, per arribar a contradicció que $\{a_n\}$ no és convergent. Negant la definició de límit tindrem que existirà $\varepsilon > 0$ i $k_1 < k_2 < \ldots < k_n \ldots$ amb $|a_{k_i} - a| > \varepsilon$ per tot $i \in \mathbf{N}$. Aleshores la subsuccessió $\{a_{k_n}\}$ està acotada i pel Teorema de Bolzano-Wierstrass tindrà algun punt d'acumulació que ho serà també de $\{a_n\}$. Ara bé tots els termes de $\{a_{k_n}\}$ es mantenen a distància més gran que ε de a i per tant aquest punt d'acumulació és diferent de a. Hem arribat doncs a contradicció. $\square$

Si una successió $\{a_n\}$ està acotada superiorment aleshores o bé el conjunt

$$A = \{x \in \mathbf{R} : \ x \ \text{ és un punt d'acumulació de } \ \{a_n\}\}$$

és no buit i està acotat superiorment o bé $A = \emptyset$. Si A és no buit definim el *límit superior* de $\{a_n\}$, com el suprem d'A i el denotem per $\limsup a_n$. En cas contrari diem que el límit superior de $\{a_n\}$ és $-\infty$. Si $\{a_n\}$ no està acotada superiorment diem que $\limsup a_n = \infty$. Si $\{a_n\}$ està acotada inferiorment aleshores el conjunt A o bé és buit o bé està acotat inferiorment. En aquest cas al ínfim de A l'anomenem el *límit inferior* de a_n, i el denotem per $\liminf a_n$. Si $A = \emptyset$ diem que el límit inferior de $\{a_n\}$ és ∞. Si $\{a_n\}$ no està acotada inferiorment aleshores diem que $\liminf a_n = -\infty$. Clarament es té sempre que

$$\liminf a_n \leq \limsup a_n.$$

Exercici *Proveu que si $\{a_n\}$ està acotada, aleshores* $\limsup a_n$ *és el més gran dels punts d'acumulació de $\{a_n\}$ i* $\liminf a_n$ *és el més petit dels punts d'acumulació de $\{a_n\}$.*

En el cas de que a_n estigui acotada es té el següent resultat:

Lema 17. *Sigui $\{a_n\}$ acotada. Llavors $\{a_n\}$ és convergent si i només si* $\liminf a_n = \limsup a_n$. *En aquest cas es té que* $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.

Prova. Es deixa al lector. □

4. La condició de Cauchy. El criteri de Stolz.

Per provar que una successió és convergent, cal en general, avaluar la distància dels seus termes al suposat límit. Això és un problema quan hom no té un candidat concret per ser el límit de la successió. Ara bé, de la definició de límit, es desprén que els termes de una successió convergent s'han d'apropar arbitràriament entre ells. Veurem que aquesta condició (expressada més rigorosament) és equivalent a la de convergència. L'interès d'aquesta condició estarà en que per decidir la convergència d'una successió només caldrà mesurar la distància entre termes de la successió.

Diem que la successió $\{a_n\}$ és una *successió de Cauchy* si per tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ per qualsevol $n, m > n_0$.

Teorema 18 *Una successió és convergent si i només si és de Cauchy.*

Prova. Suposem que $\lim a_n = l$ i sigui $\varepsilon > 0$. Sigui n_0 tal que $|a_n - l| < \varepsilon/2$. Tindrem aleshores
$$|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$
sempre que $n, m > n_0$. Per tant $\{a_n\}$ és de Cauchy.

Recíprocament, sigui $\{a_n\}$ successió de Cauchy. Començarem per veure que $\{a_n\}$ està acotada. En efecte sigui n_0 tal que $|a_n - a_m| < 1$ si $n, m > n_0$. Fixem $m > n_0$ i tindrem que $a_m - 1 < a_n < a_m + 1$ per tot $n > n_0$. Sigui $k = \min\{a_1, \ldots, a_{n_0}, a_m - 1\}$ i $K = \max\{a_1, \ldots, a_{n_0}, a_m + 1\}$. Tindrem aleshores que
$$k \leq a_n \leq K$$
per tot $n \in \mathbf{N}$. Així doncs $\{a_n\}$ està acotada. Pel Teorema de Bolzano-Wierstrass existeix $\{a_{k_n}\}$ parcial de $\{a_n\}$ convergent. Sigui $l = \lim a_{k_n}$. Veiem que $\lim a_n = l$. En efecte, considerem $\varepsilon > 0$ i sigui n_0 tal que $|a_{k_n} - l| < \varepsilon/2$ si $n > n_0$. Sigui ara n_1 tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ si $n, m > n_1$. Sigui ara $i > n_0$ tal que $k_i > n_1$. Tindrem
$$|a_n - l| < |a_n - a_{k_i}| + |a_{k_i} - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$
si $n > n_1$. Per tant $\lim a_n = l$. □

Teorema 19 (Criteri de Stolz). *Sigui $\{a_n\}$ una successió estrictament monòtona i $\{b_n\}$ una successió qualsevol. Suposem a més que* $\lim \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = l \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Aleshores les següents afirmacions són certes:*

(1) Si $\lim a_n = \pm\infty$ *llavors* $\lim \frac{b_n}{a_n} = l$.

(2) Si $\lim b_n = \lim a_n = 0$ *llavors* $\lim \frac{b_n}{a_n} = l$.

Prova. Farem la prova en el cas que $l \in \mathbf{R}$. La demostració en el cas $l = \pm\infty$ és una adaptació de la que farem en el cas en que l és finit. Considerem $\varepsilon > 0$. Sigui n_0 tal que

$$l - \varepsilon/2 < \frac{b_m - b_{m-1}}{a_m - a_{m-1}} < l + \varepsilon/2$$

per $m > n_0$. Fixem $k > n_0$ i considerem la desigualtat anterior per $m = k+1, k+2, \ldots, k+n$. Utilitzant el fet de que si $cd > 0$ llavors $\frac{a+b}{c+d}$ està sempre entre a/b i c/d i aplicant-ho a les dues primeres desigualtats obtenim

$$l - \varepsilon/2 < \frac{b_{k+2} - b_k}{a_{k+2} - a_k} < l + \varepsilon/2.$$

Iterant aquest argument obtenim:

$$(A) \qquad l - \varepsilon/2 < \frac{b_{k+n} - b_k}{a_{k+n} - a_k} < l + \varepsilon/2$$

pertot $n \in \mathbf{N}$.

Considerem el cas en $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Fent $n \to \infty$ en la desigualtat anterior tindrem que

$$l - \varepsilon/2 \le \frac{b_k}{a_k} \le l + \varepsilon/2$$

és a dir

$$|l - \frac{b_k}{a_k}| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$$

per $k \ge n_0$. Hem provat doncs (2)

Suposem ara que $\lim a_n = \pm\infty$. Si a la desigualtat (A) dividim numerador i denominador del terme central per a_{k+n} obtenim

$$l - \varepsilon/2 < \frac{\frac{b_{k+n}}{a_{k+n}} - \frac{b_k}{a_{k+n}}}{1 - \frac{a_k}{a_{k+n}}} < l + \varepsilon/2$$

o equivalentment

$$(l - \varepsilon/2)\left(1 - \frac{a_k}{a_{k+n}}\right) + \frac{b_k}{a_{k+n}} < \frac{b_{k+n}}{a_{k+n}} < (l + \varepsilon/2)\left(1 - \frac{a_k}{a_{k+n}}\right) + \frac{b_k}{a_{k+n}}.$$

Si $n \to \infty$ els límits dels termes esquerra i dret d'aquesta desigualtat són respectivament $l - \varepsilon/2$ i $l + \varepsilon/2$ i per tant per n prou gran $l - 2\varepsilon/3 < \frac{b_{k+n}}{a_{k+n}} < l + 2\varepsilon/3$ és a dir

$$|l - \frac{b_{k+n}}{a_{k+n}}| < 2\varepsilon/3 < \varepsilon.$$

Això prova (1). $\square$

Problemes.

23. Donades les següents successions, calculeu-ne els 10 primers termes, conjectureu si són o no monòtones (creixents o decreixents) i si són o no acotades i intenteu demostrar la vostra conjectura:

(a) $a_n = \frac{2n-5}{n^2+1}$.

(b) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

(c) $a_n = -E(\sqrt{n})$ on $E(x)$ denota la part entera de x.

(d) $a_n = n^2 \ln n$.

(e) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = -a_n^2 + 4a_n - 2$.

(f) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = -a_n^2 + 4a_n - 2$.

(g) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$.

(h) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2-1}{2a_n-3}$.

24. Verifiqueu cadascun dels límits següents

(a) $\lim \dfrac{n}{n+1} = 1$.

(b) $\lim \dfrac{n+3}{n^3+4} = 0$.

(c) $\lim \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} = 0$.

(d) $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

(e) Si $a, b > 0,\ \lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b)$. Què passa quan a, b no són necessàriament positius?

(f) $\lim \dfrac{\alpha(n)}{n} = 0$, on $\alpha(n)$ és el nombre de primers que divideixen n.

25. Calculeu els següents límits:

(a) $\lim n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}$.

(b) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$

(c) $\lim \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

(d) $\lim \dfrac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}$ amb $|a| < 1$ i $|b| < 1$

(e) $\lim \dfrac{(-1)^n \sqrt{n} \sin(n^n)}{n+1}$.

(f) $\lim \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

(g) $\lim nc^n$, $|c| < 1$.

(h) $\lim \dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

(i) $\lim(\sqrt[n]{n} - 1)^n$.

26. Demostreu que les següents successions son convergents:

(a) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \frac{1}{2n}$.

(b) $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. *Indicació*: Observeu que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

27. Calculeu els següents límits:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n \ln n}$.

(b) $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 1\right)^{\sqrt{n}}$.

28. Doneu exemples de successions no convergents tals que el seu producte sigui convergent.

29. Suposeu que $\lim a_n = 0$ i que $a_n > 0$. Demostreu que el conjunt de tots els nombres a_n té un màxim.

30. Què es pot dir d'una successió de nombres enters convergent?

31. Si a_n és una successió convergent, proveu que $|a_n|$ també és convergent. Es cert el recíproc?

32. Considereu la successió:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \ldots.$$

Per a quins nombres α hi ha una subsuccessió que convergeix cap a α.

33. (a) Deduïu una fórmula per la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó r amb $|r| < 1$.

(b) Donat un nombre real amb expressió decimal periòdica trobeu-li l'expressió racional.

(c) Suposeu que a_n és una successió tal que $|a_{n+1} - a_n| < c^n$ on $c < 1$. Demostreu que és convergent.

34. (a) Demostreu que si $0 < a < 2$ llavors $a < \sqrt{2a} < 2$.

(b) Demostreu que la successió

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

convergeix.

(c) Trobeu el seu límit.

35. (*) Sigui a_n una successió amb $\lim a_n = \infty$. Demostreu que $\lim \left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

36. Demostreu que la successió

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

és decreixent i deduïu que

$$0 < e - (1 + \frac{1}{n})^n < \frac{3}{n}.$$

37. Proveu que les següents successions, definides per recurrència tenen límit i calculeu-lo:

(a) $a_1 = 1,\ a_n = \sqrt{3a_{n-1}}$.

(b) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$.

(c) $a_1 > \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ a_{n+1} = \frac{a_n^2-1}{2a_n-3}$.

(d) $a_1 > 0,\ a_n = (b + a_{n-1})^{1/2}$ on $b > 0$.

(e) $a_1 > 1,\ a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$.

(f) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(b - a_n)^2$ on $b \in [0, 1]$.

38. Considerem $0 < a_1 < b_1$, i definim

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(a) Demostreu que les successions a_n i b_n convergeixen.

(b) Demostreu que tenen el mateix límit.

39. (**) Demostreu que si $\lim a_n = l$, llavors $\lim \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = l$.

40. Suposem que $a_n > 0$ per tot n i que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$.

(a) Demostreu que $\lim a_n = 0$.

(b) Demostreu que per qualsevol $x \in \mathbf{R}$ es té $\lim \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

(c) Doneu exemples en que $l = 1$ i a_n convergeix i exemples en que $l = 1$ i a_n divergeix.

41. (*) Suposem que $a_n > 0$ per tot n i que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Demostreu que $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$.

42. (a) Apliqueu el criteri de Stolz per resoldre el problema anterior.

(b) Calculeu $\lim \dfrac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha > 0$.

(c) Calculeu $\lim \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n}$.

43. Sigui (a_n) una successió de nombres reals positius tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{\log n} = \ell\,.$$

(a) Demostreu que si $\ell < 0$ aleshores $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i que si $\ell > 0$ aleshores $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(b) Fent servir el criteri de Stolz demostreu que si $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \ell$ aleshores $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log a_n}{\log n} = \log \ell$. Deduïu de l'apartat anterior que si $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n > 1$ aleshores $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i que si $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n < 1$ aleshores $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(c) Calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$

44. Siguin a i b dos nombres reals positius tals que $a < b$. Definim per recurrència les següents successions. $x_1 = a$, $y_1 = b$,

$$x_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}\,.$$

(a) Demostreu que (x_n) i (y_n) són convergents i que tenen el mateix límit.

(b) Proveu que aquest límit és $\sqrt{ab}$

45. Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Proveu que a_n és convergent. (Indicació: $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$)

46. Calculeu els següents límits:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!^2 n^n}}, \quad \lim e^{\sin n} \frac{n2^n}{1+3^n}.$$

47. Demostreu que les següents successions són de Cauchy

(a) $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots \frac{\sin n}{2^n}$.

(b) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

(c) $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$ amb $|q| < 1$ i $|a_k| < M$ $(k = 0, 1 \ldots)$.

48. Suposem que la successió $\{x_n\}$ satisfà la següent desigualtat

$$0 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m.$$

Proveu que la successió $\{\frac{x_n}{n}\}$ és convergent

49. (**) En el problema 12 hem vist que a partir de qualsevol aproximació racional $\frac{m}{n}$ a $\sqrt{2}$ es pot obtenir una aproximació millor $\frac{m+2n}{m+n}$. En particular si comencem per $m = n = 1$, obtenim: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \ldots$.

(a) Demostreu que aquesta successió està donada recursivament per

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}.$$

(b) Demostreu que $\lim a_n = \sqrt{2}$. Això dona l'anomenat desenvolupament en *fraccions contínues*

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\ldots}}.$$

(c) Demostreu que si a i b son dos nombres naturals qualsevol, llavors

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a+\ldots}}.$$

50. Sigui a_n una successió tal que tota successió parcial en tingui una de parcial convergent a 0. Demostreu que a_n té límit 0.

51. Demostreu que si $a_n > 0$,

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{i que} \quad \liminf \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Deduïu que si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ és convergent també ho és $\sqrt[n]{a_n}$ amb el mateix límit.

52. Demostreu que

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$

53. (*) Demostreu que

$$\liminf(a_n + b_n) \leq \liminf a_n + \limsup b_n \leq \limsup(a_n + b_n).$$

54. Trobeu $\limsup a_n$ i $\liminf a_n$ per cada una de les successions següents:

(a) $a_n = \frac{1}{n}$.

(b) $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{n}$.

(c) $a_1 = 0, \; a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}, \; a_{2n+1} = \frac{1+2a_{2n}}{2}$.

III. Continuïtat

1. Límit d'una funció en un punt.

Sigui $f : (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$ una funció i $x_0 \in (a,b)$. Diem que l és el límit de la funció f en el punt x_0 i escrivim $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, si per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ de manera que $|f(x) - l| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Observeu que en la present definició no cal que la funció estigui definida en el punt x_0, però si que ho ha d'estar en els punts propers a x_0.

Comproveu vosaltres mateixos que si $f(x) = k$ per tot $x \in \mathbf{R}$ aleshores $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$ per tot $x_0 \in \mathbf{R}$. Veieu també que si $g(x) = x$ per tot $x \in \mathbf{R}$ aleshores $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = x_0$ per qualsevol $x_0 \in \mathbf{R}$.

El següent lemma ens serà molt útil per a provar propietats del límit de funcions a partir de propietats de límits de successions.

Lema 1. *Sigui $f : (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$ i $x_0 \in (a,b)$. Aleshores $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ si i només si per tota successió a_n de punts de $(a,b) \setminus \{x_0\}$ amb $\lim a_n = x_0$ es compleix que $\lim f(a_n) = l$.*

Prova. Suposem que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ i sigui a_n una successió verificant les hipòtesis del lema. Hem de veure que $\lim f(a_n) = l$. Considerem $\varepsilon > 0$ i sigui $\delta > 0$ de manera que $|f(x) - l| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Sigui ara n_0 tal que $|a_n - x_0| < \delta$ sempre que $n > n_0$. Tindrem aleshores que $|f(a_n) - l| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$.

Recíprocament suposem que l no és el límit de f en x_0. Llavors existirà $\varepsilon > 0$ tal que per tot $n > 0$ hi haurà x_n amb $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ i $|f(x_n) - l| > \varepsilon$. Clarament $\lim x_n = x_0$ i $\lim f(x_n) \neq l$. □

Lema 2. *El límit d'una funció en un punt, si existeix, és únic.*

Prova. Immediata a partir del lema anterior i de la unicitat del límit d'una successió. □

Lema 3. *Siguin $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in (a,b)$ i suposem que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$. Aleshores es compleixen les següents propietats:*

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = l_1 + l_2$ *i* $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$.

(2) Si $l_1 > 0$ (resp. $l_1 < 0$) aleshores $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$) sempre que x sigui prou proper a x_0. A més en ambdós casos $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f}(x) = 1/l_1$.

Prova. (1) Sigui a_n successió en $(a, b) \setminus \{x_0\}$ amb $\lim a_n = x_0$. Hem de provar que $\lim(f + g)(a_n) = l_1 + l_2$ i $\lim(f \cdot g)(a_n) = l_1 \cdot l_2$. Tindrem $\lim(f + g)(a_n) = \lim(f(a_n) + g(a_n)) = \lim f(a_n) + \lim g(a_n) = l_1 + l_2$ ja que el límit de la suma de successions es la suma de límits. Anàlogament provaríem el resultat pel producte.

(2) Suposem $l_1 > 0$. Sigui $0 < \varepsilon < l_1$ i sigui $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ per tot x amb $0 < |x - x_0| < \delta$. Tindrem doncs que $f(x) > 0$ si $0 < |x - x_0| < \delta$. Per tant la funció $1/f$ està definida en un entorn punxat de x_0. Sigui ara x_n una successió de punts de $(a, b) \setminus \{x_0\}$ amb $\lim x_n = x_0$. Tindrem que $\lim \frac{1}{f}(x_n) = \frac{1}{\lim f(x_n)} = 1/l_1$. □

Sigui I un interval i $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. Diem que f està acotada en I si existeixen $m, M \in \mathbf{R}$ tals que $m \leq f(x) \leq M$ per tot $x \in I$. Aquesta darrera condició és equivalent a que existeixi $K > 0$ tal que $|f(x)| < K$ per tot $x \in I$. L'existència del límit de f en un punt no pot pas donar informació global de la funció, però si que dona informació a la vora del punt, com ara veurem.

Lema 4. *Suposem que el límit de f en x_0 existeix. Aleshores f està acotada en un entorn de x_0.*

Prova. Sigui $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i apliquem la definició de límit amb $\varepsilon = 1$. Tindrem que existirà $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < 1$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Així $|f(x)| < 1 + |l|$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Finalment posant $k = \max\{1 + |l|, |f(x_0)|\}$ tindrem que $|f(x)| < k$ si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ i per tant f està acotada en aquest entorn de x_0. □

El límit d'una funció en un punt pot deixar d'existir per diverses raons. Una situació que passarem ara a definir amb precisió és quan la funció pren valors arbitràriament grans quan ens apropem al punt en qüestió. Diem que el límit de f en x_0 és infinit i escrivim $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ de manera que $f(x) > \varepsilon$ si $0 < |x - x_0| < \delta$. Veieu per exemple que $\lim\limits_{x \to 0} 1/x^2 = \infty$. De manera anàloga definiríem quan el límit d'una funció en un punt és $-\infty$. Aquí també funciona un resultat equivalent al del lema 1.

Lema 5. *Sigui $f : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$ i $x_0 \in (a, b)$. Aleshores $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (resp. $-\infty$) si i només si per tota successió a_n de punts de $(a, b) \setminus \{x_0\}$ amb $\lim a_n = x_0$ es compleix que $\lim f(a_n) = \infty$ (resp. $-\infty$).*

Prova. Es deixa al lector. □

Passem ara a definir la noció de límit lateral. Diem que l és el límit per la dreta (resp. límit per l'esquerra) de f en el punt x_0 i escrivim $l = \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$ (resp. $l = \lim\limits_{x \to x_o^-} f(x)$) si per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ sempre que

$0 < x - x_0 < \delta$ (resp. $0 < x_0 - x < \delta$). El següent resultat es dedueix directament de les definicions.

Lema 6. *Sigui* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$ *i* $x_0 \in (a, b)$. *Aleshores* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *si i només si* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

Quan l'interval de definició està acotat, el comportament de f en els extrems del interval s'estudia mitjançant els límits laterals. Per estudiar el comportament de la funció en els "extrems" quan l'interval de definició no està acotat cal introduir la noció de límit en el infinit.

Sigui $f : (a, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$. Diem que el límit de f en el infinit és l i escrivim $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$, si per tot $\varepsilon > 0$, existeix $K > a$ de manera que $|f(x) - l| < \varepsilon$ per tot $x > K$. Diem que el límit de f en el infinit és infinit (resp menys infinit), i escrivim $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (resp. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$), si per tot $K > 0$ existeix $L > 0$ de manera que $f(x) > K$ (resp. $f(x) < -K$) per tot $x > L$. De manera simètrica es definiria la noció de limit en $-\infty$ quan f està definida a $(-\infty, b)$.

Exercici. Comproveu que $\lim_{x \to \infty} x = \infty$, $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$, $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{x - 1} = 1$.

2. Continuïtat.

Sigui I un interval, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ una funció, i $x_0 \in I$. Diem que f és contínua en x_0 si existeix el límit de f en x_0 i és igual a $f(x_0)$. En el cas de que I contingui algun dels seus extrems per valorar la continuïtat de f en el extrem cal substituir en la definició anterior la noció de límit per la del corresponent límit lateral. Diem que f és contínua en I si és contínua en tots els punts de I. De la definició i del Lema 1 es desprén el següent resultat:

Lema 7. *f és contínua en $x_0 \in I$ si i només si per tota successió $x_n \in I$ amb $\lim x_n = x_0$ es té que $\lim f(x_n) = f(x_0)$.*

De la definició i del Lema 3 es dedueix el següent resultat.

Proposició 8. *Siguin $f, g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ contínues en $x_0 \in I$. Llavors*

(1) $f + g$ i $f \cdot g$ són contínues en x_0.

(2) Si $f(x_0) > 0$ (resp. $f(x_0) < 0$) aleshores $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$) en un entorn de x_0. A més en ambdós casos $\frac{1}{f}$ és contínua en x_0.

Es un exercici comprovar que la funció constant i la identitat són funcions contínues a tot $\mathbf{R}$. Usant la proposició anterior hom obté que els polinomis són funcions contínues a tota la recta real. També ho seran els quocients de polinomis (funcions racionals) allà on el denominador no s'anul.li. La següent proposició analitza el comportament de la continuïtat respecte la composició de funcions.

Proposició 9. *Sigui $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ i $g : J = (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$. Sigui $x_0 \in I$ amb $f(x_0) \in J$ i suposem que f és contínua en x_0 i g també ho és en $f(x_0)$. Aleshores $g \circ f$ és contínua en x_0.*

Prova. Sigui $x_n \in I$, amb $\lim x_n = x_0$. Per la continuïtat de f en x_0 tindrem que $\lim f(x_n) = f(x_0)$ i com que $f(x_0) \in J$ per n prou grans $f(x_n) \in J$. Tindrem doncs que a partir d'un cert n, $f(x_n)$ és una successió de termes de J amb límit $f(x_0)$. Com que g és contínua en $f(x_0)$ tindrem que $\lim g(f(x_n)) = g(f(x_0))$. $\square$

Tot i que la continuïtat en un punt implica que la funció està acotada en un entorn d'aquest punt el fet de que una funció sigui contínua en un interval no implica pas en general que la funció estigui acotada en el interval. Per exemple la funció $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbf{R}$ definida per $f(x) = 1/x$ és contínua en $(0, 1)$ ja que el denominador no s'anul.la mai però no està pas acotada en $(0, 1)$ ja que $\lim_{x \to 0^+} 1/x = \infty$. Tot i que el resultat no és cert en general si que ho és si l'interval és tancat.

Teorema 10 (Teorema de Wierstrass). Sigui $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua. Aleshores f està acotada en I. Es més existeixen $y, z \in [a, b]$ tals que $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$ per tot $x \in I$.

Prova. Comencem per provar que f està acotada en I. Suposem que no ho està per arribar a una contradicció. Suposem que f no està acotada superiorment. Aleshores per cada $n \in \mathbf{N}$ podem triar x_n amb $f(x_n) > n$. Considerem ara la successió x_n. Pel teorema de Bolzano-Wierstrass aquesta successió té una parcial x_{k_n} convergent a un punt $x_0 \in I$. Com que f és contínua en x_0 tindrem que $\lim f(x_{k_n}) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Però per construcció $\lim f(x_{k_n}) = \lim f(x_n) = \infty$; arribem així a contradicció. Per tant f està acotada. Siguin ara

$$m = \inf\{f(x) : \ x \in I\} \text{ i } M = \sup\{f(x) : \ x \in I\}.$$

El nostre objectiu es provar que existeixen $y, z \in I$ amb $f(y) = m$ i $f(z) = M$. Provarem només l'existència de z. L'existència de y es provaria de manera similar. Suposem, altra vegada per arribar a contradicció, que $f(x) \neq M$ per tot $x \in I$. Aleshores la funció $f - M$ és no nul.la i contínua en I. Per la proposició 8 la funció definida per $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ és contínua en I i pel que ja hem provat acotada en I. Per altra banda com que M és el suprem de les imatges de f en I, per tot $\varepsilon > 0$ existeix $x \in I$ amb $0 < M - f(x) < \varepsilon$. La conclusió és que per tot $\varepsilon > 0$ existeix $x \in I$ amb $g(x) > 1/\varepsilon$ i per tant que g no està acotada en I en contradicció amb el que hem provat abans. $\square$

Als punts y, z del teorema anterior en diem el mínim i el màxim absolut de f en I. El teorema de Wierstrass afirma que tota funció contínua en un interval tancat té un mínim i un màxim absolut. Noteu que les dues hipòtesis del teorema són essencials. Per exemple la funció $1/x$ és contínua en $(0, 1)$ i no té màxim absolut (no està ni tan sols acotada). La funció definida per $g(x) = 1/x$ si $x \in (0, 1]$ i $g(0) = 0$ està definida en el interval tancat $[0, 1]$ però no és contínua. Clarament no té màxim absolut ja que no està acotada superiorment.

Teorema 11 (Teorema de Bolzano). *Sigui f contínua en $[a, b]$. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, llavors existeix $c \in (a, b)$ amb $f(c) = 0$.*

Prova. Suposem per exemple que $f(a) < 0 < f(b)$. Considerem $A = \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}$. Com que $A \subset [a, b]$ està acotat inferiorment i per tant té un ínfim que denotarem per z. El nostre objectiu és provar que $f(z) = 0$. Comencem per observar que $a \neq z$, ja que $f(a) < 0$ i per la continuïtat de f existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ per tot $x \in [a, a+\delta]$. En particular $a+\delta$ és una fita inferior de A d'on $z = \inf A \geq a+\delta > a$. Argumentant de manera similar hom obté que $z \neq b$. Suposem que $f(z) > 0$. Com que f és contínua tindrem que existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ si $|x - z| < \delta$. En particular $f(z - \delta/2) > 0$ i tindríem que $z - \delta/2 \in A$, el que contradiu que z és el ínfim de A. Si $f(z) < 0$ aleshores existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ si $|x - z| < \delta$. Tindrem aleshores que com que z és el ínfim de A $f(x) \leq 0$ per tot $x \in [a, z + \delta/2]$. Així doncs $z + \delta/2$ és una fita inferior de A el que contradiu que z sigui el ínfim de A. Per tant $f(z) = 0$. $\square$

Corol.lari 12. *Si f és continua en $[a, b]$ i $f(a) < c < f(b)$ aleshores existeix $x \in (a, b)$ amb $f(x) = c$.*

Prova. Només cal aplicar el teorema de Bolzano a la funció contínua $f - c$. $\square$

Corol.lari 13. *Tot nombre real positiu té una única arrel enèsima positiva.*

Prova. Sigui $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. Considerem la funció $f(x) = x^n$ que és contínua ja que f és un polinomi. Si $a > 1$ tindrem que $0 = f(0) < a < a^n = f(a)$. Pel Corol.lari anterior tindrem que existeix $c \in (0, a)$ amb $f(c) = a$, és a dir $c^n = a$. Si $a < 1$ tindrem que $0 = f(0) < a < 1 = f(1)$ i per tant existirà $c \in (0, 1)$ tal que $c^n = a$. Si $a = 1$ no hi ha res a dir. La unicitat es dedueix del fet de que la funció x^n és injectiva en els reals positius. $\square$

3. Invertibilitat i continuïtat

Recordeu que per invertir una funció cal que sigui injectiva. El següent teorema caracteritza les funcions continues i injectives en un interval. Per enunciar-lo necessitem un parell de definicions.

Sigui $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$, diem que f és *creixent* a I si $f(x) < f(y)$ sempre que $x < y$. Doneu vosaltres mateixos la definició de funció *decreixent*. Diem que f és monòtona si és o bé creixent o bé decreixent. Fixeu-vos que una funció monòtona és injectiva. El recíproc no és cert en general, però el següent teorema afirma que el recíproc val quan la funció està definida en un interval i és continua.

Teorema 14. *Sigui $f : (c,d) \longrightarrow \mathbf{R}$. Si f és injectiva i continua, aleshores f és monòtona. A més f^{-1} és també continua en $f((c,d))$.*

Prova. Siguin $a, b \in (c,d)$ amb $a < b$. Com que f és injectiva tindrem que o bé $f(a) > f(b)$ o bé que $f(b) > f(a)$. Suposem per exemple que $f(b) > f(a)$ (l'altra situació es provaria de manera semblant). En aquest cas si f és monòtona, hauria de ser creixent. Per a veure-ho, siguin $x, y \in (c,d)$ amb $x < y$ i volem provar que $f(y) > f(x)$. Per $t \in [0,1]$, definim $x(t) = (1-t)a + tx$ i $y(t) = (1-t)b + ty$. Fixeu-vos que per tot $t \in [0,1]$ $x(t)$ està entre a i x i $y(t)$ està entre b i y i per tant $x_t, y_t \in (c,d)$. A més, $x(t) < y(t)$, ja que $x(t) = (1-t)a + tx < (1-t)b + ty = y(t)$. Com que f és injectiva tenim que $f(x(t)) \neq f(y(t))$. Considerem ara $h : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ definida per:

$$h(t) = f(y(t)) - f(x(t)).$$

Tindrem que h és continua ja que és composició de funcions contínues. Per altra banda h no s'anul.la mai i pel Teorema de Bolzano tenim que o bé $h(t) > 0$ per tot $t \in [0,1]$ o bé $h(t) < 0$ per tot $t \in [0,1]$. Observem però que $h(0) = f(b) - f(a) > 0$ i per tant $h(1) = f(y) - f(x) > 0$. Hem provat doncs, que f és creixent.

Passem ara a estudiar la continuïtat de f^{-1}. Suposem que f és creixent (el cas decreixent es provaria de la mateixa manera). Observem que aleshores f^{-1} és creixent a $f(c,d)$. Sigui $y = f(x) \in f(c,d)$ i volem provar que

$$\lim_{z \to y} f^{-1}(z) = f^{-1}(y) = x.$$

Sigui $\varepsilon > 0$ de manera que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (c,d)$. Tenim aleshores que $f(x-\varepsilon) < f(x) = y < f(x+\varepsilon)$. Sigui $\delta = \min\{y - f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon) - y\}$. Tindrem que si $z \in (y-\delta, y+\delta)$ llavors $z \in (f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon))$ i per tant $f^{-1}(z) \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Per tant $\lim_{z \to y} f^{-1}(z) = x$. $\square$

Problemes.

55. Trobeu els següents límits

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

(b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

(c) $\lim_{x\to y} \dfrac{x^n-y^n}{x-y}$.

(d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$.

(e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$.

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

56. En cadascun dels casos següents trobeu un δ tal que $|f(x)-l|<\epsilon$ per a tot x que satisfaci $0<|x-a|<\delta$.

(a) $f(x)=x^4,\ l=a^4$.

(b) $f(x)=x^4+\frac{1}{x},\ a=1,\ l=2$.

(c) $f(x)=\frac{x}{1+\sin^2 x},\ a=0,\ l=0$.

(d) $f(x)=\sqrt{|x|},\ a=0,\ l=0$.

(e) $f(x)=\sqrt{x},\ a=1,\ l=1$.

57. Demostreu les següents igualtats

(a) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)$

(b) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to a} f(x-a)$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} f(x^3)$. Doneu un exemple on $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ existeixi, però $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existeixi.

58. Sigui f una funció definida en (a,b) i $a<c<b$. Proveu que

$$\lim_{x\to 0}(f(x+c)-f(c))=0$$

implica que

$$\lim_{x\to 0}(f(x+c)-f(c-x))=0.$$

Doneu un exemple per al qual el recíproc no és cert.

59. (*) Demostreu que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

60. Sigui f tal que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$. Proveu que $\lim\limits_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$.

61. Demostreu que si $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=l$ i $b\neq 0$, llavors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(bx)}{x}=bl$. Què passa si $b=0$?

62. Calculeu els següents límits

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$.

(d) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$.

(e) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)^3\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3$.

(f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

63. Estudieu la continuïtat de les funcions trigonomètriques.

64. Sigui $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ una funció definida per

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\mathbf{Q},\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Proveu que existeix el $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ i no existeix $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

65. (**)Suposem que per cada nombre natural n, A_n denota un conjunt finit de nombres de $[0,1]$ i que A_n i A_m no tenen cap element en comú si $m\neq n$. Definim f de la manera següent:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \text{ pertany a } A_n,\\ 0 & \text{si } x \text{ no pertany a } A_n \text{ per a cap } n.\end{cases}$$

Demostreu que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ per a tot a de $[0, 1]$.

66. Doneu exemples que mostrin que les definicions següents de $\lim_{x \to a} f(x) = l$ no són correctes:

(a) Per a tot $\delta > 0$ hi ha un $\epsilon > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, llavors $|f(x) - l| < \epsilon$.

(b) Per a tot $\epsilon > 0$ hi ha un $\delta > 0$ tal que si $|f(x) - l| < \epsilon$, llavors $0 < |x - a| < \delta$.

67. Sigui f continua en el punt c i suposeu que $f(c) > 0$. Demostreu que existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ per tot $x \in (x - \delta, x + \delta)$.

68. Suposem que $\lim_{x \to a^-} f(x) < \lim_{x \to a^+} f(x)$. Demostreu que hi ha un $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(y)$ sempre que $a - \delta < x < a < y < a + \delta$. Es cert el recíproc?

69. Calculeu els següents límits laterals:

$$\begin{array}{ccc}
\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{|x-1|} & \lim_{x \to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|} & \lim_{x \to 0^+} (\sin x)^x \\
\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x}{x^2 - 4} & \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x \sin x}{|x|} & \lim_{x \to 0^-} \dfrac{x \sin x}{|x|} \\
\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x-1} & \lim_{x \to 2^+} x - [x] & \lim_{x \to 2^-} x - [x]
\end{array}$$

70. Demostreu que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x})$.

71. (a) Demostreu que si f està acotada en un entorn del punt c i si $\lim_{x \to c} g(x) = 0$, llavors $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$.

(b) Proveu que si $f : (a, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ és tal que $\lim_{x \to \infty} x f(x) = l \in \mathbf{R}$, llavors $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

72. Trobeu els límits següents, quan existeixin:

(a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin^3 x}{5x + 6}$.

(b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x \sin^3 x}{x^2 + 5}$.

(c) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x} - x$.

(d) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

(e) $\lim_{x \to \infty} x \sin \dfrac{1}{x}$.

(f) $\lim_{x \to \infty} x \sin^2 x$.

(g) $\lim_{x\to\infty} x^2 \sin\frac{1}{x}$.

73. Sigui $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ una funció creixent, i sigui a_n una successió de nombres reals amb $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Proveu que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$ implica que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$. Mostreu mitjançant un exemple que aquesta implicació és falsa si la funció no és creixent.

74. Estudieu la continuïtat de les següents funcions:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbf{Q}, \\ 1 - x & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, (p,q) = 1, \\ 0 & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} q & x = \frac{p}{q}, (p,q) = 1, \\ 0 & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

75. Trobeu els valors de a i b per als quals les següents funcions són contínues.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0, \\ a + x & x \geq 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \cos\frac{a}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq -1, \\ a + bx^2 & x > -1. \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ a & x = 0. \end{cases}$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x & x \leq 0, \\ \sqrt{4 - x^2} & 0 < x < 1. \end{cases}$$

76. (a) Suposem que f és una funció que satisfà $|f(x)| < |x|$ per a tot x. Demostreu que f és continua en 0.

(b) Doneu un exemple d'una funció que satisfaci les hipòtesis de l'apartat anterior i que no sigui contínua en cap $a \neq 0$.

(c) Suposem que g és continua en 0, que $g(0) = 0$ i que $|f(x)| < |g(x)|$. Demostreu que f és continua en 0.

77. Doneu un exemple d'una funció f que no sigui contínua enlloc, però tal que $|f|$ sigui contínua pertot arreu.

78. Què es pot dir d'una funció continua $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ que pren només valors racionals?

79. Suposem que f satisfà $f(x+y) = f(x)+f(y)$, i que f és contínua en 0. Demostreu que f és contínua en a per tot a.

80. Trobeu totes les funcions contínues $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ que satisfan:

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y) + a$ amb $a \in \mathbf{R}$, per a tots $x, y \in \mathbf{R}$.

(b) $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ per a tots $x, y \in \mathbf{R}$.

81. Siguin $0 < k,\ 0 < \alpha \leq 1$ i sigui $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ una funció satisfent

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha.$$

Demostreu que f és continua. En el cas $\alpha = 1$ i $0 < k < 1$, demostreu també que f té un únic punt fixe.

82. (a) Demostreu que si f és continua en a llavors $|f|$ també ho és.

(b) Demostreu que tota f contínua es pot escriure com $f = g + h$ on g és parella i continua i h és senar i contínua.

(c) Demostreu que si f i g són contínues, llavors $\max(f, g)$ i $\min(f, g)$ també ho són.

(d) Demostreu que tota f contínua és pot escriure com $g - h$ on g i h són no negatives i contínues.

83. (*) Sigui $f : R \longrightarrow \mathbf{R}$ estrictament monòtona.

(a) Proveu que per tot $c \in \mathbf{R}$ existeixen els límits laterals.

(b) Proveu que per cada $c \in \mathbf{R}$ es té

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x)$$

si f és creixent i es té la desigualtat inversa si f és decreixent.

(c) Demostreu que les discontinuïtats de f són com a molt numerables.

84. Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$. Demostreu que f és contínua si i només si la imatge de qualsevol successió de Cauchy és una successió de Cauchy. Veieu amb un exemple que hi ha funcions contínues de (a,b) en $\mathbf{R}$ tals que la imatge d'una successió de Cauchy no és una successió de Cauchy.

85. (**) Sigui $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $\lim_{x\to c} f(x)$ existeix per cada $c \in [0,1]$. Demostreu que el conjunt de discontinuïtats de f és finit o numerable. Proveu que el mateix enunciat és cert si canvieu $[0,1]$ per $\mathbf{R}$. *Indicació:* Demostreu que per cada $\epsilon > 0$ el conjunt $\{c \in [0,1] : \ |f(c) - \lim_{x\to c} f(x)| > \epsilon\}$ és finit.

86. Per cadascuna de les funcions següents, decidiu si estan fitades superiorment o inferiorment en l'interval indicat, i si assoleixen el seu valor màxim o mínim.

(a) $f(x) = x^2$ en $(-1,1)$.

(b) $f(x) = x^3$ en $(-1,1)$.

(c) $f(x) = x^2$ en $\mathbf{R}$.

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $(0,\infty)$.

(e) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbf{Q}, \\ q & x = \frac{p}{q},\ (p,q) = 1. \end{cases}$ en $[0,1]$.

87. Demostreu que hi ha algun nombre x tal que:

(a) $x^{179} + \frac{163}{1+x^2+\sin^2 x} = 119$.

(b) $\sin x = x - 1$.

88. Suposem que f i g són contínues, que $f^2 = g^2$ i que $f(x) \neq 0$ per a tot x. Demostreu que o bé $f(x) = g(x)$ per a tot x, o bé $f(x) = -g(x)$ per a tot x.

89. Demostreu que tota funció continua de $[0,1]$ en $[0,1]$ té un punt fix.

90. Demostreu que la gràfica de qualsevol funció continua $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ha de tallar el cercle $x^2 + y^2 = 1$.

91. Demostreu que un polinomi de grau senar és exhaustiu.

92. (*)

(a) Sigui $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua amb $f(0) = f(1)$. Demostreu que existeix $c \in [0, \frac{1}{2}]$, amb $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.

(b) Sigui $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua amb $f(0) = f(1)$ i $n \in \mathbf{N}$. Demostreu que existeix $c \in [0, \frac{n-1}{n}]$, amb $f(c + \frac{1}{n}) = f(c)$.

93. (*) Demostreu que no hi ha cap funció continua de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ que prengui exactament dos cops cada valor.

94. (**)

(a) Suposeu que f satisfà la conclusió del teorema de Bolzano i que és injectiva. Demostreu que f és continua.

(b) Demostreu que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ és monòtona i pren tots els valors entre $f(a)$ i $f(b)$, aleshores és contínua.

(c) Suposem que f satisfà la conclusió del teorema de Bolzano i que pren cada valor només un nombre finit de vegades. Demostreu que f és contínua.

95. Suposem f contínua i que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.

(a) Demostreu que si n és senar, llavors hi ha un nombre x tal que $x^n + f(x) = 0$.

(b) Demostreu que si n és parell, llavors hi ha un nombre y tal que $y^n + f(y) \leq x^n + f(x)$ per a tot x.

96. Sigui f una funció polinòmica qualsevol. Demostreu que hi ha algun nombre y tal que $|f(y)| \leq |f(x)|$ per a tot x.

97. Sigui $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

Demostreu que f no és exhaustiva. (Ind: Proveu que f té un mínim absolut).

98. Suposem que f és una funció continua tal que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Demostreu que hi ha algun nombre y tal que $|f(y)| \geq |f(x)|$ per a tot x.

IV. Les funcions exponencial i logarítmica

Sigui $a \in \mathbf{R}, a > 0$ i $x = p/q \in \mathbf{Q}$. Aleshores a^x és defineix com l'arrel q-ésima positiva de a elevada a p (en el capítol anterior hem provat que tot nombre real positiu té una única arrel q-ésima positiva). Aquesta definició no depend de l'expressió de x com a quocient d'enters. El nostre objectiu es donar sentit a aquesta expressió quan $x \in \mathbf{R}$. Comencem per enumerar algunes de les propietats de la funció a^x quan x és racional.

Lema 1. *Sigui $a \in \mathbf{R}^+$ i $f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ definida per $f(x) = a^x$. La funció f té les següents propietats:*

(1) $f(x + y) = f(x)f(y)$

(2) Si $a > 1$, f és creixent. Si $a < 1$, f és decreixent.

(3) Si a_n és una successió de racionals amb $\lim a_n = 0$, aleshores $\lim f(a_n) = 1$.

Prova. Provarem només (3) i ho farem en el cas en que $a > 1$. Considerem $\varepsilon > 0$. Les successions $a^{1/n}$ i $a^{-1/n}$ tendeixen a 1 i per tant podem prendre n_0 tal que $a^{1/n_0} - 1 < \varepsilon$ i $|a^{-1/n_0} - 1| < \varepsilon$. Com que $\lim a_n = 0$ sigui n_1 tal que $|a_n| < 1/n_0$ si $n \geq n_1$. Tindrem doncs $-1/n_0 < a_n < 1/n_0$ i com que per (2) f és creixent obtenim:

$$-\varepsilon < a^{-1/n_0} - 1 = f(-1/n_0) - 1 < f(a_n) - 1 < f(1/n_0) - 1 = a^{1/n_0} - 1 < \varepsilon$$

sempre que $n > n_1$. Així doncs $|f(a_n) - 1| < \varepsilon$. El cas $a < 1$ es resoldria de manera similar tenint en compte que f és decreixent en aquest cas. $\square$

Lema 2. *Sigui $a, x \in \mathbf{R}$, $a > 0$ i $x_n \in \mathbf{Q}$ amb $\lim x_n = x$. Aleshores $\lim a^{x_n}$ existeix i és independent de la successió de racionals que aproxima a x. Es a dir, si x_n, y_n són successions de racionals amb $\lim x_n = \lim y_n = x$ aleshores $\lim a^{x_n} = \lim a^{y_n}$.*

Prova. Suposem $a > 1$. Sigui x_{k_n} una subsuccessió monòtona de x_n. Pel Lema 1.(2) tindrem que la successió $a^{x_{k_n}}$ és monòtona. D'altra banda si $y, z \in \mathbf{Q}$ i $y < x < z$ aleshores per n prou gran $y < x_n < z$ i altra vegada pel Lema 1.(2) $a^y < a^{x_n} < a^z$. Així doncs la successió $a^{x_{k_n}}$ es monòtona i acotada i per tant té límit. D'altra banda $a^{x_n} = a^{x_n - x_{k_n}} a^{x_{k_n}}$. Com que $\lim x_n - x_{k_n} = 0$, pel Lema 1.(3) obtenim que $\lim a^{x_n - x_{k_n}} = 1$. Obtenim així que el límit de a^{x_n} existeix i és igual al límit de $a^{x_{k_n}}$. Sigui ara $y_n \in \mathbf{Q}$ amb $\lim y_n = x$. Hem de veure que $\lim a^{y_n} = \lim a^{x_n}$. Tenim $\lim a^{y_n} = \lim a^{y_n - x_n} \lim a^{x_n} = \lim a^{x_n}$. $\square$

Podem ara definir ja l'exponencial per qualsevol nombre real. Sigui $\tilde{f}:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ definida per $\tilde{f}(x)=\lim a^{x_n}$ on x_n és una successió qualsevol de racionals amb $\lim x_n = x$. El lema anterior ens assegura que aquesta definició és correcta en el sentit de que no depèn de l'elecció de la successió x_n. La següent proposició resumeix les propietats bàsiques de $\tilde{f}$.

Proposició 3. *La funció $\tilde{f}$ té les següents propietats:*

(1) Si $x\in\mathbf{Q}$, $\tilde{f}(x)=a^x$.

(2) $\tilde{f}(x+y)=\tilde{f}(x)\tilde{f}(y)$.

(3) Si $a>1$, $\tilde{f}$ és creixent i si $a<1$, $\tilde{f}$ és decreixent.

(4) $\tilde{f}(x)>0$ per tot $x\in\mathbf{R}$.

(5) $\tilde{f}$ és contínua.

(6) Si $a>1$, $\lim_{x\to\infty}\tilde{f}(x)=\infty$ i $\lim_{x\to-\infty}\tilde{f}(x)=0$. Si $a<1$, $\lim_{x\to-\infty}\tilde{f}(x)=\infty$ i $\lim_{x\to\infty}\tilde{f}(x)=0$.

Prova. (1) Sigui x_n una successió de racionals amb $\lim x_n = x\in\mathbf{Q}$. Volem veure que $\tilde{f}(x)=\lim a^{x_n}=a^x$. Per això observeu que usant el Lema 1.(3) tindrem

$$\lim a^{x_n}=\lim a^{x_n-x}a^x=a^x.$$

(2) Siguin x_n, y_n successions de racionals amb $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$. Tindrem aleshores que $\lim x_n+y_n=x+y$. Finalment

$$\tilde{f}(x+y)=\lim a^{x_n+y_n}=\lim a^{x_n}a^{y_n}=\lim a^{x_n}\lim a^{y_n}=\tilde{f}(x)\tilde{f}(y).$$

(3) Fem només el cas $a>1$. Siguin $x,y\in\mathbf{R}$ amb $x<y$. Sigui $z,t\in\mathbf{Q}$ amb $x<z<t<y$ i siguin x_n i y_n successions de racionals amb $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$. Podem a més triar les successions amb $x_n<z<t<y_n$ per tot $n\in\mathbf{N}$. Tindrem que $a^{x_n}<a^z<a^t<a^{y_n}$ per tot $n\in\mathbf{N}$ i per tant

$$\tilde{f}(x)=\lim a^{x_n}\leq a^z<a^t\leq\lim a^{y_n}=\tilde{f}(y).$$

(4) Considerem només el cas $a>1$. Sigui $x\in\mathbf{R}$ i sigui $y\in\mathbf{Q}$ amb $y<x$. Tindrem $0<a^y=\tilde{f}(y)<\tilde{f}(x)$.

(5) Com sempre pensarem que $a>1$. Començarem provant la continuïtat a 0. Sigui x_n una successió amb $\lim x_n=0$. Hem de provar que $\lim\tilde{f}(x_n)=\tilde{f}(0)=1$. La demostració és molt semblant a la del Lema 1.(3). Considerem $\varepsilon>0$ i sigui n_0 tal $a^{1/n_0}-1<\varepsilon$ i $|a^{-1/n_0}-1|<\varepsilon$. Sigui ara n_1 tal que $|x_n|<1/n_0$ per tot $n\geq n_1$. Tindrem per $n\geq n_1$ que $-1/n_0<x_n<1/n_0$ i usant (3)

$$-\varepsilon<a^{-1/n_0}-1=\tilde{f}(-1/n_0)-1<\tilde{f}(x_n)-1<\tilde{f}(1/n_0)-1=a^{1/n_0}-1<\varepsilon.$$

Obtenim així $|\tilde{f}(x_n) - 1| < \varepsilon$ per $n \geq n_1$, el que prova la continuïtat de f a 0.

Sigui ara $x \in \mathbf{R}$. Provar la continuïtat de $\tilde{f}$ en x és equivalent a provar que $\lim_{h\to 0} \tilde{f}(x+h) = \tilde{f}(x)$ Ara bé

$$\lim_{h\to 0} \tilde{f}(x+h) = \lim_{h\to 0} \tilde{f}(x)\tilde{f}(h) = \tilde{f}(x) \lim_{h\to 0} \tilde{f}(h) = \tilde{f}(x).$$

(6) Es deixa al lector □

A partir ara escriurem a^x per $x \in \mathbf{R}$ en comptes de $\tilde{f}(x)$ i denominem a aquesta funció la funció exponencial en base a. Com que per la proposició anterior aquesta funció és contínua, monòtona i el conjunt imatge és $(0, \infty)$ té una inversa, que denominarem el logaritme en base a i denotarem per $\log_a$, definida a $(0, \infty)$ que pel Teorema 14 de la Secció anterior serà també contínua i monòtona. Al logaritme en base e el denotem per $\ln$. El logaritme té les següents propietats:

Proposició 4. *Sigui* $\log_a : (0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ *la funció inversa de* a^x*. El logaritme té les següents propietats:*

(1) $\log_a$ *és contínua. Si* $a > 1$ *és creixent mentre que si* $a < 1$ *és decreixent.*

(2) $\log_a(1) = 0$*. Si* $a > 1$, $\lim_{x\to 0} \log_a(x) = -\infty$ *i* $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$*. Si* $a < 1$, $\lim_{x\to 0} \log_a(x) = \infty$ *i* $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty$*.*

(3) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$*.*

Prova. Es deixa al lector. □

Problemes.

99. Proveu que $(a^x)^y = a^{xy}$ i que $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$.

100. Suposem que f satisfà $f(x+y) = f(x)f(y)$, i que f és contínua en 0. Demostreu que f és contínua en a per tot a.

101. Sigui $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ contínua verificant $f(x+y) = f(x)f(y)$. Demostreu que existeix $a \geq 0$, tal que $f(x) = a^x$.

102. Sigui $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continua no idènticament nul.la que compleix

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y).$$

Demostreu que hi ha $a > 0$ tal que $f(x) = a^{(x^2)}$ per a tot $x \in \mathbf{R}$.

103. Comproveu els següents límits:

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = \infty$ per tot $\alpha \in \mathbf{R}$.

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, per tot $\alpha \in \mathbf{R},\ \alpha > 0$.

(c) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ per tot $\alpha \in \mathbf{R},\ \alpha > 0$.

V. Derivació

1. Definició de derivada i propietats elementals

Sigui $f : (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$. Diem que f és derivable en $x_0 \in (a,b)$ si existeix el següent límit:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

En aquest cas denotem aquest límit amb $f'(x_0)$ i l'anomenem la *derivada de f en x_0*. Geomètricament $f'(x_0)$ és la pendent de la recta tangent a la gràfica en el punt x_0. En el cas de que f estigui definida en $[a,b]$ diem que f és derivable en a (respectivament b) si existeix l'anterior límit per la dreta (respectivament l'esquerra)). Diem que f és derivable en (a,b) si f és derivable en cada punt de (a,b). En aquest cas podem parlar de la funció derivada, f' que assigna a cada punt $x \in (a,b)$ la derivada de f en x, $f'(x)$.

Exemple. *Derivada d'una funció constant.* Sigui $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida per $f(x) = c$ per tot $x \in \mathbf{R}$. Veiem que f és derivable en qualsevol punt. Sigui $x_0 \in \mathbf{R}$, tindrem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0.$$

Així doncs, f és derivable en x_0 i $f'(x_0) = 0$.

Exemple. *Derivada de la identitat.* Considerem ara la funció identitat, és a dir $f(x) = x$ per tot $x \in \mathbf{R}$. Sigui $x_0 \in \mathbf{R}$. Tindrem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$$

Així doncs f és derivable en x_0 i $f'(x_0) = 1$.

Exemple. *La funció valor absolut no és derivable en 0.* Considerem $f(x) = |x|$. Si $x_0 > 0$ tindrem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

ja que $|x| = x$ si x és prou proper a x_0.. Veieu vosaltres mateixos que $f'(x_0) = -1$ quan $x_0 < 0$. Estudiem ara la derivabilitat en 0. Tindrem que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1 \text{ i } \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$$

d'on deduïm que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ no existeix i per tant la funció valor absolut no és derivable en 0.

Lema 1. *Sigui $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ derivable en $x_0 \in I$. Aleshores f és contínua en x_0.*

Prova. Tindrem que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

i per tant $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

2. Regles de derivació

Proposició 2. *Sigui f, g definides en un entorn d'a i derivables en a. Aleshores $f+g$ i $f.g$ són derivables en a i es verifiquen les següents relacions:*

(a) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(b) $(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Si a més $f(a) \neq 0$, llavors $\frac{1}{f}$ està definida en un entorn d'a, és derivable en a i

(c) $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$.

Prova. Comencem per estudiar la derivabilitat de $f+g$. Tindrem

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$
$$= f'(a) + g'(a)$$

Obtenim doncs el resultat enunciat. Veiem ara que passa amb el producte:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{(f.g)(a+h)-(f.g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h).g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + \lim_{h\to 0} g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= f(a)g'(a) + g(a)f'(a).
\end{aligned}$$

Fixeu-vos en que per obtenir la darrera igualtat, hem usat que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ que es dedueix del fet de que f és continua en a (per què f és continua en a?)

Finalment passem a estudiar la derivabilitat de $\frac{1}{f}$. Observeu primer que degut a que f és continua en a i a que $f(a) \neq 0$, existirà un entorn d'a en que f no s'anul.la i per tant $\frac{1}{f}$ està definida en un entorn d'a. Tindrem:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f}(a+h) - \frac{1}{f}(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{f(a+h)f(a)h} = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

□

Proposició 3 (Regla de la cadena). *Siguin* $g : (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$ *i* $f : (c,d) \longrightarrow \mathbf{R}$. *Suposeu que* g *és derivable en* $x \in (a,b)$ *i* f *és derivable a* $g(x) \in (c,d)$. *Aleshores* $f \circ g$ *és derivable a* x *i* $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Prova. Per tal d'entendre millor la prova suposarem primer que hi ha un entorn de $g(x)$ tal que $g(y) \neq g(x)$ per tot y d'aquest entorn. En altres termes, que per h prou petit $g(x+h) - g(x) \neq 0$. Si això és així tindrem:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f\circ g)(x+h) - (f\circ g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ g)(x+h) - (f\circ g)(x)}{g(x+h) - g(x)} \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

sempre i quan els límits del segon terme d'aquesta igualtat existeixin. Per una banda un dels dos límits és precisament $g'(a)$. Veiem doncs que $\lim_{h\to 0} \frac{(f\circ g)(x+h) - (f\circ g)(x)}{g(x+h)-g(x)} = f'(g(x))$. Per provar-ho considereu $k = g(x+h) - g(x))$. Tindrem

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ g)(x+h) - (f\circ g)(x)}{g(x+h) - g(x)} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} = \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x)) \end{aligned}$$

ja que quan $h \to 0$, tindrem que $k \to 0$ (per què?).

En general però hom no pot pas suposar que $g(x+h) - g(x) \neq 0$ per h prou petit (per exemple g podria ser constant) i hom no pot pas considerar en general la descomposició que hem fet abans. Per arreglar aquest problema considerem la següent funció:

$$\Phi(h) = \begin{cases} \dfrac{(f\circ g)(x+h) - (f\circ g)(x)}{g(x+h) - g(x)} & \text{si } g(x+h) \neq g(x), \\ f'(g(x)) & \text{si } g(x+h) = g(x). \end{cases}$$

Ara sí podem escriure

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f\circ g)(x+h) - (f\circ g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \Phi(h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

i per tant per demostrar el resultat n'hi ha prou amb veure que $\lim_{h\to 0}\Phi(h) = f'(g(x))$. Això és així ja que quan $g(x+h) \neq g(x)$, $\Phi(h)$ tendeix a $f'(g(x))$ quan $h \to 0$ (ho hem vist abans) i quan $g(x+h) = g(x)$, $\Phi(h) = f'(g(x))$. □

Proposició 4. *Sigui* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$ *injectiva i continua en* (a,b) *i derivable en* $c \in (a,b)$ *amb* $f'(c) \neq 0$. *Aleshores* f^{-1} *és derivable en* $f(c)$ *i*

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Prova. El fet de que f sigui injectiva i continua ens assegura que f^{-1} està ben definida i és continua. Per a veure que f^{-1} és derivable en $f(c)$ hem d'investigar l'existència del següent límit:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(c)+h) - f^{-1}(f(c))}{h}.$$

Si posem $k = f^{-1}(f(c)+h) - c$ tindrem $h = f(c+k) - f(c)$ i podem escriure:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(c)+h) - f^{-1}(f(c))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k}{f(c+k) - f(c)}.$$

Com que $k = f^{-1}(f(c)+h) - c$ i f^{-1} és continua a $f(c)$ tindrem que quan h tendeix a 0 també k tendeix a zero. Així doncs obtenim

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{f(c+k) - f(c)} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{f(c+k) - f(c)} = \frac{1}{f'(c)}.$$

□

Lema 5 (Derivades d'algunes funcions elementals). *Siguin* $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^x$ *i per* $x > 0$ *i* $\alpha \in \mathbf{R}$, $h(x) = x^\alpha$. *Tindrem:*

(i) $f'(x) = \frac{1}{x}$,

(ii) $g'(x) = e^x$

(iii) $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Prova.

(i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)^{1/h} = \lim\limits_{h\to 0} \ln\left(\left(1 + \dfrac{1}{h/x}\right)^{x/h}\right)^{1/x} = \dfrac{1}{x}.$

(2) Per la proposició anterior, tindrem $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{1/e^x} = e^x$.

(3) Com que $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, aplicant (2) i la regla de la cadena obtenim:

$$h'(x) = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

Exercici. *Calculeu les derivades de les inverses de* $\sin x, \cos x,$ *i* $\tan x$

3. Teoremes bàsics sobre derivació.

Proposició 6. *Sigui* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$ *i sigui* $c \in (a,b)$ *amb* $f(x) \geq f(c)$ *per tot* $x \in (a,b)$. *Suposem a més que* f *és derivable en* c. *Aleshores* $f'(c) = 0$.

Prova. Com que f és derivable a c tindrem que existeix el $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$. Per tant existeixen els dos limits laterals i són iguals a $f'(c)$, és a dir

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c).$$

Ara bé, el primer terme d'aquesta igualtat és no negatiu i el segon terme és no positiu (perquè?). Tindrem doncs que perquè hi hagi igualtat els dos límits laterals han de ser zero. Per tant $f'(c) = 0$ $\square$

Noteu que si canviem les hipòtesis de la proposició anterior demanant $f(x) \leq f(c)$, per tot $x \in (a,b)$, la conclusió és la mateixa (per a demostrar-ho podeu canviar f per $-f$ i aplicar la proposició a $-f$).

Sigui $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ i $c \in I$. Diem que c és un màxim (resp. mínim) local o relatiu de f si existeix un interval obert J contingut a I amb $c \in J$ i tal que $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$) per tot $x \in J$. Quan no vulguem especificar si c és un màxim o un mínim, direm que c és un extrem local o relatiu. De l'anterior proposició es dedueix fàcilment el següent corol.lari.

Corol.lari 7. *Sigui* $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ *i sigui* $c \in I$ *extrem local de* f. *Si* f *és derivable en* c, $f'(c) = 0$.

Teorema 8 (Teorema de Rolle). *Sigui* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *continua i derivable en* (a,b). *Suposem que* $f(a) = f(b)$. *Aleshores existeix un punt* $c \in (a,b)$ *amb* $f'(c) = 0$.

Prova. Com que f és continua en $[a,b]$, pel Teorema de Wierstrass, té un màxim i un mínim absoluts. Si un dels dos està en el interval obert (a,b), aleshores és també un extrem relatiu i pel corol.lari anterior la derivada de f en aquest punt es 0. Si això no passa, tindrem que el màxim i mínim absoluts estan a la vora de $[a,b]$. Com que, per hipòtesi, $f(a) = f(b)$ tindrem que el valor màxim i mínim que pren f és el mateix. Això implica que f és constant i per tant la derivada en qualsevol punt de (a,b) és zero. $\square$

Teorema 9 (Teorema del valor mig). *Sigui* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *continua en* $[a,b]$ *i derivable en* (a,b). *Aleshores existeix un punt* $c \in (a,b)$ *verificant*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prova. Considerem la funció

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

(què mesura $h(x)$?) Un simple càlcul mostra que $h(a) = h(b) = 0$. D'altra banda h és continua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) (per què?) Podem doncs, aplicar el Teorema de Rolle a h i obtenim l'existència d'un punt $c \in (a, b)$ amb $h'(c) = 0$. Ara bé $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ i, per tant obtenim $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

El Teorema del valor mig té diverses conseqüències importants.

Corol.lari 10. *Sigui f derivable en (a, b) verificant $f'(x) = 0$ per tot $x \in (a, b)$. Aleshores f és constant.*

Prova. Per provar que f és constant hem de veure que $f(x) = f(y)$ per tot $x, y \in (a, b)$. Siguin $x, y \in (a, b)$, pel Teorema del valor mig, tindrem que existeix $c \in (x, y)$ amb

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Com que per hipòtesi $f'(c) = 0$ obtenim $f(x) = f(y)$ □

Corol.lari 11. *Sigui f derivable en (a, b) verificant $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) per tot $x \in (a, b)$. Aleshores f és creixent (resp. decreixent) en (a, b).*

Prova. Provarem nomes el cas $f'(x) > 0$. Siguin $x < y \in (a, b)$. Tindrem que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$ i per tant $f(x) < f(y)$). □

Corol.lari 12. *Sigui f derivable en un entorn d'a i tal que f' és continua en aquest entorn. Suposem a més que $f'(a)$ és diferent de zero. Aleshores existeix un altre entorn d'a en el que f és invertible.*

Prova. N'hi ha prou amb veure que hi ha un entorn d'a en el que f és monòtona (recordeu que ja hem vist que en aquest cas f^{-1} és derivable en $f(a)$ i $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$). Suposem per exemple que $f'(a) > 0$. Com que f' és continua, existeix un entorn d'a amb f' positiva. Es a dir, existeixen $b < c$ amb $a \in (b, c)$ i $f'(x) > 0$ per tot $x \in (b, c)$. Pel corol.lari anterior tindrem que f és creixent en (a, b). □

Teorema 13 (Teorema del valor mig generalitzat). *Siguin $f, g : [a, b] \longrightarrow$ $\mathbf{R}$ continues en $[a, b]$ i derivables en (a, b). Aleshores, existeix un punt $c \in (a, b)$ verificant:*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Prova. Apliqueu el teorema de Rolle a la funció

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

$\square$

La conclusió d'aquest teorema es pot escriure també, en el cas de que $g(b)-g(a) \neq 0$, de la següent forma:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teorema 14 (Regla de l'Hopital). *Suposem que f i g son dues funcions definides en un entorn de a i que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Suposem també que existeix el $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Aleshores també existeix el $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prova. Noteu primer que de les hipòtesis de l'enunciat s'en dedueixen els següents fets:

(i) Les funcions f i g són derivables en un entorn punxat de a i la derivada de g en aquest entorn és diferent de zero. Es a dir, existeixen $b < c$ amb $a \in (b,c)$ tals que f i g són derivables en $(b,a) \cup (a,c)$ i $g'(x) \neq 0$ per tot $x \in (b,a) \cup (a,c)$.

(ii) Modificant, si cal els valors de f i g en a de manera que $f(a) = g(a) = 0$ podem suposar que f i g són continues en $[b,c]$ (per què aquesta modificació és irrelevant?)

(iii) Tindrem també, $g(x) \neq 0$ per tot x en $(b,a) \cup (a,c)$. En efecte, suposem que $g(x) = 0$ per algun $x \in (b,a) \cup (a,c)$ (per exemple $x \in (a,c)$). Aleshores, estem en condicions d'aplicar el Teorema de Rolle a l'interval $[a,x]$, concloent que hi ha un punt $y \in (a,x)$ amb $g'(y) = 0$, en contradicció amb (i). Per tant la funció f/g està ben definida a $(b,a) \cup (a,c)$.

Després d'aquestes observacions estem ja en condicions de provar l'enunciat. Sigui $x \in (b,a) \cup (a,c)$. Aplicant el teorema del valor mig generalitzat obtenim

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(d_x)}{g'(d_x)}$$

on $d_x \in (x,a)$ si $x < a$ o $d_x \in (a,x)$ si $x > a$. Així quan $x \to a$ tindrem que $d_x \to a$. Finalment obtenim

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(d_x)}{g'(d_x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$

Observem que sense les hipòtesis de la regla de l'Hopital no és en general cert que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Per exemple $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos x} = 0$ i $\lim_{x \to 0} -\frac{2x}{\sin x} = -2$.

La Regla de l'Hopital té diverses generalitzacions que us convido a demostrar.

1. *Suposem que f i g son dues funcions definides en un entorn d'a i que* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$. *Suposem també que existeix el* $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Aleshores també existeix el* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *i*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. *Suposem que f i g son dues funcions definides en $[a, \infty)$ i que* $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$. *Suposem també que existeix el* $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Aleshores també existeix el* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *i*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. *Suposem que f i g son dues funcions definides en $[a, \infty)$ i que* $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ *(o $-\infty$). Suposem també que existeix el* $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Aleshores també existeix el* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *i*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4. *Els mateixos enunciats que 2 i 3 canviant $[a, \infty)$ per $(-\infty, b]$ i ∞ per $-\infty$.*

5. *Els mateixos enunciats que la regla original i 1, canviant el fet de que f i g estan definides en un entorn d'a per f i g definides en un semientorn d'a (per la dreta o per l'esquerra) i canviant la noció de límit per la corresponent de límit lateral.*

Problemes.

104. Sigui $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ derivables amb $f(x) > 0$. Demostreu que $h(x) = f(x)^{g(x)}$ és derivable i $h'(x) = g(x)(f(x))^{g(x)-1}f'(x) + (f(x))^{g(x)}g'(x)\log(f(x))$. Apliqueu aquest resultat per calcular les derivades de $x^x, (x^x)^x$ i $x^{(x^x)}$.

105. Sigui $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$ Demostreu que f és derivable en 0.

106. Sigui f una funció tal que $|f(x)| \leq x^\alpha,\ \alpha > 1$. Demostreu que f és derivable en 0.

107. Sigui $0 < \beta < 1$. Demostreu que si f satisfà $|f(x)| > |x|^\beta$ i $f(0) = 0$, llavors f no és derivable en el 0.

108. Trobeu $f'(x)$ si $f(x) = |x|^3$. Trobeu $f''(x)$. Existeix $f'''(x)$ per a tot x?

109. Calculeu les derivades de les funcions trigonomètriques.

110. Sigui $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ Suposem també que h i k són dues funcions tals que

$$\begin{array}{ll} h'(x) = \sin^2(\sin(x+1)) & \qquad k'(x) = f(x+1) \\ h(0) = 3 & \qquad k(0) = 0. \end{array}$$

Calculeu:

(a) $(f \circ h)'(0)$.

(b) $(k \circ f)'(0)$.

(c) $g'(x^2)$, on $g(x) = h(x^2)$.

111. Calculeu $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

i $g(0) = g'(0) = 0$.

112. (a) Demostreu que si f és derivable en a, llavors $|f|$ és derivable en a, sempre que $f(a) \neq 0$.

(b) Doneu un contraexemple si $f(a) = 0$.

(c) Demostreu que si f i g són derivables en a, llavors $\max(f, g)$ i $\min(f, g)$ són derivables en a sempre que $f(a) \neq g(a)$.

(d) Doneu un contraexemple si $f(a) = g(a)$.

113. Si f és derivable tres vegades i $f'(x) \neq 0$, la *derivada de Schwarz* de f en x es defineix com:

$$\mathcal{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

(a) Demostreu que

$$\mathcal{D}(f \circ g) = [\mathcal{D}f \circ g].(g')^2 + \mathcal{D}g.$$

(b) Demostreu que si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, amb $ad - bc \neq 0$, llavors $\mathcal{D}f = 0$. Conseqüentment $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathcal{D}g$.

114. Suposem que $f^{(n)}(a)$ i $g^{(n)}(a)$ existeixen. Demostreu la *fórmula de Leibniz*:

$$(f.g)^{(n)}(a)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

115. Suposem que $f(x) = xg(x)$ per a una certa funció g que és contínua en 0. Demostreu que f és derivable en 0 i trobeu $f'(0)$ en termes de g.

116. Suposem que f és derivable en 0 i que $f(0) = 0$. Demostreu que $f(x) = xg(x)$ per alguna funció g contínua en 0.

117. Demostreu que és impossible escriure $x = f(x)g(x)$ amb f i g derivables i $f(0) = g(0) = 0$.

118. Quantes vegades és derivable en el zero la funció $x^n|x|$, si $n \in \mathbf{N}$?

119. Proveu que si f és derivable i parella (resp. senar) aleshores f' és senar (resp. parella).

120. Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Es derivable en el punt $x = 0$? Es continua la derivada?

121. Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Si ara g és una funció que satisfà $g(0) = 0$ i $g'(0) = 5$, calculeu $(f \circ g)'(0)$, en el cas de que existeixi.

122. (*) Demostreu que per a cada $n \in \mathbf{N}$, l'equació $x^n + x - 1 = 0$ té una única solució positiva. Si denotem per a_n aquesta solució, demostreu que la successió a_n és convergent i calculeu-li el límit.

123. Sigui $\alpha > 0$ i $f : (0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ derivable amb $f'(x) > \frac{1}{x^\alpha}$ per tot $x \in (0,1]$. Demostreu que si $\alpha \geq 1$ aleshores $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. Mostreu amb algun exemple que si $\alpha < 1$ hi ha funcions verificant la desigualtat i tals que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

124. Proveu que l'equació $e^x = x + 1$, té una única solució real.

125. Sigui $x_1 < 0$ i considerem la successió definida recurrentment per $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$. Proveu que x_n és monótona creixent i acotada i calculeu $\lim x_n$. Proveu que si prenem $x_1 > 0$ aleshores x_n és monótona creixent però divergent.

126. Proveu que l'equació $2^{-x} - x = 0$, té una única solució real i calculeu la seva part entera.

127. Trobeu el nombre de solucions de l'equació $3 \log x = x$.

128. Trobeu els punts en que les tangents a la corba $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$, són paral.leles a l'eix d'abscises.

129. Trobeu el punt de la corba $y^2 = 2x^3$, en que la tangent és perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$.

130. Sigui $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ derivable amb f' contínua tal que

$$f(1/n) = \begin{cases} > 0 & \text{si } n \text{ és parell,} \\ < 0 & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

Proveu que $f(0) = f'(0) = 0$

131. Determineu els màxims i mínims absoluts de les següents funcions en els intervals que s'indica.

(a) $x^4 - 5x^2 + 4, \ I = [0,2]$.

(b) $(x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}, \ I = [0,5]$.

(c) $\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}, \ I = [-0.5, 3]$.

(d) $\sqrt[3]{(x-3)^2}, \ I = [2,4]$.

132. Sigui $a > 0$. Calculeu el valor màxim de

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{|x-a|}.$$

133. Demostreu que de tots els rectangles amb un perímetre donat, el quadrat és el que té àrea màxima.

134. Entre tots els cilindres amb un volum donat, trobeu el que té la superfície mínima.

135. Dos passadissos, d'amplades a i b, s'uneixen formant un angle recte. Quina és la llargada màxima possible d'una escala de mà que pot ser transportada d'un passadís a l'altre?

136. Un camp de futbol d'amplada a i llargada b té dues porteries centrades d'amplada c. Des de quin punt de la banda l'angle de tir és màxim?

137. (*) Suposem que $f'(x) \geq M > 0$ per a tot $x \in [0,1]$. Demostreu que hi ha un interval de llargada $\frac{1}{4}$ en el qual $|f| \geq \frac{M}{4}$.

138. Suposem que $f'(x) > g'(x)$ per a tot x, i que $f(a) = g(a)$. Demostreu que $f(x) > g(x)$ si $x > a$ i $f(x) < g(x)$ si $x < a$.

139. Estudieu la validesa de les següents desigualtats:

$$\begin{array}{ll}
|\sin x - \sin y| \leq |x - y| & \frac{x-y}{x} < \log \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y},\ \ 0 < x < y \\
e^x > \frac{1}{1+x} & e^x > 1 + (1+x)\log(1+x) \\
\frac{x-1}{x} < \log x < x - 1 & (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p),\ \ a, b > 0, p > 1.
\end{array}$$

Indicació, per la última: Considereu la funció $\frac{(1+x)^p}{1+x^p}$.

140. Demostreu que $\frac{1}{n+1} < \log n + 1 - \log n < \frac{1}{n}$ i deduïu que $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \log n + 1$. Proveu que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

141. Demostreu que tota funció derivable de $[0,1]$ en $[0,1]$ amb $f'(x) \neq 1$ té un únic punt fix.

142. Suposem que f satisfà $f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$ per alguna funció g. Demostreu que si f val 0 en dos punts aleshores f val 0 en tot l'interval comprès entre ells.

143. (*) Suposem que $f(0) = 0$ i que f' és creixent. Demostreu que $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ és creixent a $(0, \infty)$.

144. (a) Demostreu que si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ existeixen tots dos, llavors $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

(b) Demostreu que si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x)$ existeixen tots dos, llavors $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$.

145. Suposem que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n$, amb $n > 1$. Estudiant f', demostreu que f és constant.

146. Una funció $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ es diu que satisfà la condició de Lipschitz si existeix $K > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Proveu que si I és un interval obert i f derivable, la condició de Lipschitz equival a que la derivada estigui acotada a I.

147. Sigui $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbf{R}$ derivable amb f' acotada. Demostreu que $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ existeix.

148. Sigui $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ una funció derivable amb $\inf |f'(x)| > 0$. Demostreu que si $f(x_n)$ convergeix, aleshores x_n convergeix.

149. Sigui $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbf{R}$ una funció derivable amb $|f'(x)| \leq \log(1/x)$.

(a) Demostreu que existeix el límit $\lim f(1/n)$.

(b) Demostreu que existeix el límit $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

150. Sigui $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbf{R}$ derivable amb $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ per a tot $x \in (0, 1)$ Demostreu que $f(\frac{1}{n})$ és convergent. Es cert que la successió $f(x_n)$ és convergent per a qualsevol successió x_n amb límit 0?

151. (*) Què es més gran e^π o π^e?

152. Calculeu els següents límits:

(a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$.

(b) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}$.

(c) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} (\log(1 + x))^x$.

153. Calculeu $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x}$ i comproveu que en aquest cas no es pot aplicar directament la regla de l'Hôpital.

154. Dibuixeu les gràfiques de les següents funcions:

$$\begin{array}{lll} \sin(2x) & \sin x^2 & x \sin x \\ \tan(x) - x & \frac{\sin x}{x} & x \sin(\frac{1}{x}) - 2x \\ \sqrt{x} \sin(x^2) & x + x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) & \frac{1}{\sqrt{\sin x - 1}} \end{array}$$

155. Sigui f una funció derivable tal que $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$. Proveu que

$$\lim_{x \to \infty} (f(x + 1) - f(x)) = 0.$$

156. Sigui f una funció derivable tal que $\lim_{x \to \infty} x f'(x) = 0$. Proveu que

$$\lim_{x \to \infty} (f(3x + 2) - f(x)) = 0.$$

157. Demostreu que si $\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, llavors

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0,$$

per algun $x \in [0, 1]$.

158. Calculeu f^{-1} per a cadascuna de les f següents:

(a) $f(x) = x^3 + 1$.

(b) $f(x) = (x + 1)^3$.

(c) $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbf{Q}, \\ -x & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$.

(d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0, \\ 1 - x^3 & x < 0. \end{cases}$.

(e) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $-1 < x < 1$.

159. Trobeu un interval on la funció $f(x) = 2\sin(3x)$ sigui invertible i calculeu la seva inversa.

160. Trobeu el domini de definició i una expressió algebraica de la funció $\sin(\arccos x)$.

161. Calculeu les inverses de les següents funcions:

(a) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(b) $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(c) $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

162. Demostreu que si f és una funció continua creixent tal que $f = f^{-1}$ aleshores $f(x) = x$ per tot x.

163. Restringiu les següents funcions a un interval on siguin invertibles i calculeu la derivada de la funció inversa en el punt p.

(a) $f(x) = x^2 - x + 5$, $p = 7$.

(b) $f(x) = x^3 + x + 2$, $p = 0$.

(c) $f(x) = 2x^3 + 5$, $p = 21$.

164. Trobeu una fórmula per $(f^{-1})''(x)$.

165. La derivada de Schwartz $\mathcal{D}f$ ha estat definida en el problema 113. Trobeu una fórmula per $\mathcal{D}f^{-1}$.

166. Suposem que f és una funció injectiva la derivada de la qual no s'anul.la mai, i que $f = F'$. Sigui $G(x) = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$. Calculeu $G'(x)$

167. Suposem que $f'(x) = \sin^2(\sin(x+1))$ i $h(0) = 3$. Trobeu:

(a) $(h^{-1})'(3)$.

(b) $(g^{-1})'(3)$, essent $g(x) = h(x+1)$.

VI. Convexitat i segona derivada

Definició. *Diem que $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ és convexa, si donats dos punts qualssevol $a, b \in I$, $a < b$ el segment que uneix els punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ queda per damunt de la gràfica de f en (a, b). Diem que $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ és còncava, si donats dos punts qualssevol $a, b \in I$, $a < b$ el segment que uneix els punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ queda per sota de la gràfica de f en (a, b).*

El nostre objectiu és caracteritzar quan una funció és convexa o còncava en un interval. Clarament f és còncava a I si i només sí $-f$ és convexa a I. Per tant concentrarem la nostra atenció només en la convexitat.

Lema 1. *f és convexa en I si i només si per qualssevol $a, x, b \in I$ amb $a < x < b$ es té:*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Prova. La recta que uneix $(a, f(a))$ amb $(b, f(b))$ té per equació:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Tindrem doncs que la condició de convexitat és equivalent a que

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

d'on s'obté la condició enunciada. $\square$

Si f és derivable es poden donar caracteritzacions simples de la convexitat en termes de f'.

Proposició 2. Sigui f convexa en I. Si f és derivable en a aleshores la gràfica de f queda per damunt de la recta tangent a la gràfica en $(a, f(a))$, excepte en el punt $(a, f(a))$. Si $a < b$ i f és derivable en a i b llavors $f'(a) < f'(b)$.

Prova. Sigui $0 < h_1 < h_2$. Aplicant el Lema 1 als punts $a, a + h_1, a + h_2$ hom obté

$$\frac{f(a + h_1) - f(a)}{h_1} < \frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2}.$$

Si definim $F(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ la desigualtat anterior ens diu que F és una funció creixent. Tindrem doncs

$$f'(a) = \lim_{h\to 0^+} F(h) < F(h)$$

per tot $h > 0$ tal que $a + h \in I$. Això implica que la recta tangent queda per sota de la recta secant que uneix $(a, f(a))$ amb $(a + h, f(a + h))$, i per tant $(a + h, f(a + h))$ queda per damunt de la recta tangent. Un raonament simètric provaria que

$$f'(a) > F(h)$$

quan $h < 0$ el que prova també en aquest cas que la recta tangent queda per sota de $(a + h, f(a + h))$. Això prova la primera part de l'enunciat. Si apliquem ara el que ja hem vist tindrem:

$$f'(a) < \frac{f(a + (b-a)) - f(a)}{b-a} = \frac{f(b + (a-b)) - f(b)}{a-b} < f'(b).$$

□

De fet les dues condicions de la proposició anterior caracteritzen la convexitat quan f és derivable. Per veure-ho necessitem algun resultat previ.

Lema 3. *Sigui f derivable i f' creixent. Si $a < b$ i $f(a) = f(b)$, aleshores $f(x) < f(a) = f(b)$ per tot $x \in (a, b)$.*

Prova. Comencem veient que no hi ha cap punt $x \in (a, b)$ amb $f(x) = f(a)$. Suposem que existeix $x \in (a, b)$ amb $f(x) = f(a)$. Aleshores aplicant al teorema de Rolle als intervals $[a, x]$ i $[x, b]$ obtenim $x_1 < x_2$ amb $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ el que contradiu que f' sigui creixent. Pel teorema de Bolzano només hi ha dues possibilitats. O bé és $f(x) > f(a) = f(b)$ per tot $x \in (a, b)$ o bé $f(x) < f(a) = f(b)$ per tot $x \in (a, b)$. Veiem que la primera possibilitat no ïpot passar. En efecte tindríem aleshores que $f'(a) \geq 0 \geq f'(b)$ el que torna a contradir que f' sigui creixent. □

Teorema 4. *Sigui f derivable en I. Llavors f és convexa si i només si f' és creixent.*

Prova. Ja hem vist a la Proposició 2 que si f és convexa aleshores f' és creixent. Veiem el recíproc. Sigui f derivable amb f' creixent i siguin $a < b \in I$. En $[a, b]$ considerem la funció $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Observem que $g' = f' - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ i per tant g' és creixent. Per altra banda $g(a) = g(b) = f(a)$. Aplicant el Lema 3 obtenim que $g(x) < f(a)$ per tot $x \in (a, b)$. Es a dir

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

per tot $x \in (a, b)$. Per tant f és convexa. □

Teorema 5. *Sigui f derivable en I. Llavors f és convexa si i només si qualsevol tangent a la gràfica queda per sota de la gràfica excepte en el punt de contacte.*

Prova. Una implicació ja l'hem provat a la Proposició 2. Veiem l'altra. Suposem que la gràfica de f queda per damunt de qualsevol tangent excepte en el punt de contacte. Provarem que en aquestes condicions f' és creixent. Sigui $a < b \in I$. Utilitzant l'hipòtesi obtenim,

$$f(b) > f(a) + f'(a)(b-a)$$

i

$$f(a) > f(b) + f'(b)(a-b).$$

Tindrem doncs,

$$f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} < f'(b).$$

i per tant f' és creixent. Pel Teorema 4, f és convexa. □

Definició. *Sigui f derivable en I. Si la funció $f' : I \longrightarrow \mathbf{R}$ és derivable en $a \in I$ diem que f és dues vegades derivable en a. Si això passa per tot punt de I diem aleshores que f és dues vegades derivable en I. Si f és dues vegades derivable en $a \in I$ denotem $(f')'(a)$ per $f''(a)$ i l'anomenem la segona derivada de f en a.*

Teorema 6. *Sigui f dues vegades derivable en I. Llavors les següents afirmacions són certes:*

(1) Si f és convexa en I aleshores $f''(x) \geq 0$ per tot $x \in I$.

(2) Si $f''(x) > 0$ per tot $x \in I$ aleshores f és convexa en I.

Prova. Es deixa al lector. □

Definició. *Diem que $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ és convexa en $x \in I$ si existeix un entorn (semientorn si x és un extrem de I) J de x en I de manera que $f : J \longrightarrow \mathbf{R}$ és convexa. Direm que f és còncava en x si existeix un entorn (semientorn si x és un extrem de I) J de x en I de manera que $f : J \longrightarrow \mathbf{R}$ és còncava. Diem que x és un punt d'inflexió de f si existeix $\delta > 0$ tal que f és convexa (resp. còncava) a $(x-\delta, x]$ i còncava (resp. convexa) a $[x, x+\delta)$.*

Proposició 7. *Sigui f dues vegades derivable en I. Aleshores les següents afirmacions són certes:*

(1) Si a és un punt d'inflexió aleshores $f''(a) = 0$.

(2) Suposem a més que f'' és continua en $a \in I$. Aleshores si $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$) aleshores f és convexa (resp. còncava) en a.

Prova. Es deixa al lector. □

Problemes.

168. Proveu que si una funció convexa té un mínim relatiu en un punt aquest és absolut. Proveu també, que en aquest cas no hi ha d'altres extrems relatius.

169. Sigui f una funció continua i dues vegades derivable a l'interval $[a, b]$. Suposem que el segment que uneix els punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ talla la gràfica de la funció en un punt. Proveu que existeix $c \in (a, b)$ amb $f''(c) = 0$

170. Considereu una funció, f, dues vegades derivable amb les següents propietats:

(a) $f(x) > 0$ per $x \geq 0$

(b) f decreixent i $f'(0) = 0$

Demostreu que existeix un $x > 0$ amb $f''(x) = 0$

171. Demostreu que f és convexa en I si i només si per qualssevol $x, y \in I$ i $t \in (0, 1)$ es té

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

172. (a) Demostreu que si f és convexa, aleshores $f(\dfrac{x+y}{2}) < \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

(b) Suposeu que f satisfà la propietat anterior. Demostreu que $f(kx+(1-k)y) < kf(x) + (1-k)f(y)$ sempre que k és de la forma $\frac{m}{2^n}$ amb $m, n \in \mathbf{N}$ i $m < 2^n$.

(c) Suposeu que f satisfà la condició de la part a) i és continua. Demostreu que és convexa.

173. Siguin f i g convexes i g creixent. Demostreu que $g \circ f$ és convexa.

174. Demostreu que una funció convexa en un interval obert és continua. Veieu amb un exemple que aquest resultat no és necessàriament cert si el interval no és obert

175. Denotem $f'_+(a)$ la derivada per la dreta en el punt a i $f'_-(a)$ la derivada per l'esquerra en el punt a. Demostreu que si f és convexa, $f'_+(a)$ i $f'_-(a)$ existeixen sempre. Proveu també que f'_+ i f'_- són creixents i que $f'_-(a) \leq f'_+(a)$. Finalment proveu que $f'_+(a) = f'_-(a)$ si i només si f'_+ és continua en el punt a

176. Proveu que si f és convexa i creixent aleshores f^{-1} és còncava i creixent. Anàlogament si f és convexa i decreixent aleshores f^{-1} és convexa i decreixent.

VII. Aproximació polinòmica

Les funcions polinòmiques són les úniques funcions que sabem avaluar, ja que per avaluar-les en un punt només cal efectuar sumes i productes. En aquest capítol intentarem "aproximar" una funció a la vora d'un punt per mitjà de funcions polinòmiques. El sentit de la paraula "aproximar" el precisarem tot seguit.

Si dues funcions f, g definides en un entorn de a compleixen que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ aleshores $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$. Si a més

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0$$

llavors $f - g$ tendeix a 0, quan $x \to a$, més ràpidament que $x - a$. En general si

$$\lim \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^n} = 0,$$

$f - g$ tendeix a 0, quan $x \to a$, més ràpidament que $(x - a)^n$. Observem que com més gran sigui n, més ràpidament $f - g$ tendeix a 0 quan $x \to a$. En altres paraules com més gran sigui n, més "semblants" són f i g a prop de a.

Definició. *Diem que f i g tenen un contacte d'ordre $\geq n$ en a si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

En el capítol anterior hem definit quan una funció és dues vegades derivable. Diem que f és tres vegades derivable si f és dues vegades derivable en un entorn de a i f'' és derivable en a. Parlem aleshores de la derivada tercera de f en a que denotem per $f'''(a)$ o bé $f^{(3)}(a)$. Iterant aquest procediment hom obté la noció de funció n vegades derivable en a. A la derivada enèsima de f en a la denotem per $f^{(n)}(a)$. En aquest context $f^{(0)}$ denota la pròpia funció f. Diem que f és de classe $\mathcal{C}^n$ en a si f es n vegades derivable en un entorn de a i $f^{(n)}$ és contínua en aquest entorn. Diem que f és de classe $\mathcal{C}^\infty$ en a si f es de classe $\mathcal{C}^n$ en a per tot $n \in \mathbf{N}$.

Lema 1. *Siguin f i g derivables n vegades en a. Aleshores es compleix:*

(1) Si $f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a)$, per $i = 0, 1, \dots .n$, i $f^{(n)}$ i $g^{(n)}$ són contínues en a aleshores f i g tenen contacte d'ordre $\geq n$.

(2) Si f i g tenen contacte d'ordre $\geq n$ en a aleshores $f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a)$, per $i = 0, 1, \ldots .n$.

Prova. (1) Aplicant n vegades la Regla de l'Hopital obtenim:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)}{n!}$$

que és igual a 0 degut a la continuïtat de $f^{(n)}$ i $g^{(n)}$ en a i a que $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$.

(2) Per comoditat posem $F = f - g$ i hem de provar que F té les n primeres derivades en a igual a zero. Ho provarem per inducció. Per $n = 1$ tindrem

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{x - a} = 0,$$

d'on

$$\lim_{x \to a} F(x) = 0.$$

Com que F és derivable en a, serà contínua en a i obtenim així que $F(a) = 0$. Tindrem aleshores:

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{F(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(a).$$

Suposem cert el resultat per $n - 1$ i veiem-ho per n. Sigui F amb

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Aleshores tindrem que també

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Podem doncs aplicar la hipòtesi d'inducció i obtenim que $F(a) = F'(a) = \ldots = F^{(n-1)}(a) = 0$. Tindrem doncs aplicant $n - 1$ vegades la regla de l'Hopital

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{F(x)}{(x-a)^n} = \ldots = \lim_{x \to a} \frac{F^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{F^{(n-1)}(x) - F^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} F^{(n)}(a).$$

$\square$

Així doncs hem de pensar la condició de tenir contacte d'ordre $\geq n$ en un punt com equivalent a tenir les n primeres derivades en el punt igual. Donada una funció f, n vegades derivable en un punt a per obtenir un polinomi P amb un contacte d'ordre $\geq n$ cal prefixar que $P^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$. Això constitueixen $n + 1$ dades i com que un polinomi de grau n té $n + 1$ "graus de llibertat" ($n + 1$ coeficients) sembla natural cercar un polinomi de grau n.

Teorema 2 *Sigui f, n vegades derivable en a. Aleshores el següent polinomi:*

$$P_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

té un contacte amb f d'ordre $\geq n$ en a.

Prova. Per comoditat posem $P = P_{n,f,a}$. Veiem primer que $P^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$ per $i = 0, \ldots, n$. Per això computem la derivada i-èsima de P per $i \leq n$. Obtenim:

$$P^{(i)}(x) = i!\frac{f^{(i)}(a)}{i!} + (i+1)!\frac{f^{(i+1)}(a)}{(i+1)!}(x-a) + \ldots + n(n-1)\ldots(n-i+1)\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-i}$$

d'on

$$P^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$$

per $i \leq n$.

Veiem ara que P i f tenen un contacte d'ordre $\geq n$ en el punt a. Observem que no estem en condicions d'aplicar el Lema 1 ja que les nostres hipòtesis no ens asseguren la continuïtat de $f^{(n)}$ en a. Si apliquem $n-1$ vegades la regla de l'Hopital obtenim

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} =$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

□

Al polinomi $P_{n,f,a}$ l'anomenem el *polinomi de Taylor de grau n de f en a*. Veiem ara que $P_{n,f,a}$ és el únic polinomi de grau $\leq n$ que té un contacte d'ordre $\geq n$ amb f en a. Per això n'hi ha prou amb veure que si dos polinomis de grau $\leq n$ tenen contacte $\geq n$ en un punt aleshores són iguals.

Proposició 3. *Sigui P i Q polinomis de grau $\leq n$ amb un contacte d'ordre $\geq n$ en a. Aleshores $P = Q$.*

Prova. Posem $R = P - Q$. Hem de provar que si $\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$ aleshores $R = 0$. Posem

$$R(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots a_n(x-a)^n.$$

Per $i = 0, \ldots, n$ tindrem que $\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^i} = 0$. Aplicant aquesta igualtat amb $i = 0$, obtenim que $b_0 = 0$. Utilitzant que $b_0 = 0$ i usant la igualtat anterior amb $i = 1$, obtenim que $b_1 = 0$. Iterant aquest procediment obtenim $b_0 = b_1 = \ldots = b_n = 0$. Així doncs $R = 0$. □

El polinomi de Taylor té ja una aplicació important a l'hora de decidir si un punt amb derivada nul.la es màxim o mínim local.

Teorema 4. *Sigui f derivable n vegades en a. Si $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ i $f^{(n)}(a) \neq 0$, llavors*

(1) Si n és senar a no és extrem relatiu.

(2) Si n és parell i $f^{(n)}(a) > 0$ aleshores a és un mínim relatiu.

(3) Si n és parell i $f^{(n)}(a) < 0$ aleshores a és un màxim relatiu.

Prova. Sigui $P(x) = f(a) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ el polinomi de Taylor de grau n de f en a. Pel Teorema 2 tindrem:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n} = 0,$$

és a dir

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Si n és parell per x proper a a, $f(x) - f(a)$ té el signe de $f^{(n)}(a)$. D'aquí es dedueix (2) i (3). Si n és senar aleshores $f(x) - f(a)$ canvia de signe segons si x és més gran o més petit que a. Així obtenim (1). $\square$

Sigui f derivable n vegades en a i sigui $P = P_{n,f,a}$. El problema que abordarem tot seguit és el de donar una mesura de l'error comés al usar P com aproximació de f a prop de a. Es a dir obtenir alguna valoració de $f(x) - P(x)$.

Teorema 5. *Sigui f derivable $n+1$ vegades en I un entorn de a. Sigui $P = P_{n,f,a}$ i $R_n = f - P$. Sigui $x \in I$. Llavors:*

(1) Fórmula de Cauchy:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a) \qquad \textit{per algun } \xi \textit{ entre } a \textit{ i } x.$$

(2) Fórmula de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \textit{per algun } \eta \textit{ entre } a \textit{ i } x.$$

(3) Si, a més $f^{(n+1)}$ és integrable en $[a, x]$,

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Prova. Suposem sense pèrdua de generalitat que $a > x$. Per cada $t \in [a, x]$ podem posar:

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_{n,t}(x).$$

Fixem x i posem $S(t) = R_{n,t}(x)$. Tindrem

$$S(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Observem que $S(x) = 0$ i $S(a) = R_n(x)$ i que S és derivable. Si computem $S'(t)$ obtenim,

$$S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Aplicant el teorema del valor mig a S tindrem:

$$-\frac{R_n(x)}{x-a} = \frac{S(x) - S(a)}{x-a} = S'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-\xi)^n,$$

per algun $\xi \in (a, x)$ amb el que obtenim la fórmula de Cauchy del reste.

Per a obtenir la fórmula de Lagrange considerem $g(t) = (x-t)^{n+1}$. Aplicant el teorema del valor mig generalitzat a S i g obtenim:

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{S(x) - S(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{S'(\eta)}{g'(\eta)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^{n+1}}{-(n+1)(x-\eta)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!},$$

per algun $\eta \in (a, x)$, d'on obtenim (2).

Finalment si $f^{(n+1)}$ és integrable en $[a, x]$ tindrem:

$$-R_n(x) = S(x) - S(a) = \int_a^x S'(t)dt = -\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt,$$

d'on obtenim (3). □

Si f és de classe $\mathcal{C}^\infty$ en un entorn I de a aleshores es pot construir el polinomi de Taylor de grau n de f en a per qualsevol $n \in \mathbf{N}$. Si denotem el polinomi de Taylor de grau n i centrat en a de f per P_n i el reste associat per R_n tindrem que $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. Si $\lim_{n\infty} R_n(x) = 0$ aleshores la successió de polinomis de Taylor aproxima bé a la funció. Això no té per què passar. Per exemple la funció

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

és de classe $\mathcal{C}^\infty$ al origen $f^{(i)}(0) = 0$ per tot $i \in \mathbf{N}$ i per tant $P_n(x) = 0$ per tot x. Obtenim doncs que en aquest cas el reste es igual a la funció i no tendeix pas a 0.

Diem que f és analítica en a si és de classe $\mathcal{C}^\infty$ en un entorn de a i $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ per tot x en aquest entorn.

Exercici. *Demostreu que les següents funcions són analítiques al origen :*

(1) $f(x) = e^x$.

(2) $f(x) = \sin x$.

(3) $f(x) = \cos x$.

(4) $f(x) = \ln(1 + x)$.

(5) $f(x) = \arctan x$.

A (1),(2) i (3) demostreu que $\lim R_n(x) = 0$ *per* $x \in \mathbf{R}$. *A (4) i (5) demostreu que* $\lim R_n(x) = 0$ *per* $|x| < 1$.

Si f és analítica tindrem que $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$. Observem que $\lim P_n(x)$ és una expressió del tipus

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

expressió que ja no és un polinomi i que es coneix amb el nom de sèrie de potències. En els casos estudiants anteriorment obtenim les següents expressions:

(1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(2) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

(4) $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n}$, per $|x| < 1$.

(5) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, per $|x| < 1$.

Problemes.

177. Doneu un exemple d'una funció n vegades derivable en un punt però no $n + 1$ vegades derivable.

178. Siguin f i g dues funcions $\mathcal{C}^n$ en un entorn del punt a. Demostreu que f i g tenen contacte d'ordre n si i només si $f^i(a) = g^i(a)$ per $i = 0, \dots, n$

179. (a) Suposeu que f és derivable en $[a, b]$. Demostreu que si el mínim de f en $[a, b]$ està en el punt a aleshores $f'(a) \geq 0$ i si està en b aleshores $f'(b) \leq 0$

(b) Suposeu ara que $f'(a) < 0$ i que $f'(b) > 0$. Demostreu que existeix un punt $x \in (a, b)$ amb $f'(x) = 0$.

(c) Demostreu que si $f'(a) < c < f'(b)$ aleshores existeix $x \in (a, b)$ amb $f'(x) = c$.

180. Trobeu els polinomis de Taylor de grau 4 (en el punt indicat) per a les següents funcions:

(a) $f(x) = e^{2x}$ en el punt $a = 0$.

(b) $f(x) = x \ln x$ en el punt $a = 1$.

(c) $f(x) = x^5 + x^3 + x$ en els punts $a = 0$ i $a = 1$.

(d) $f(x) = (1 + x)^5$ en el punt $a = 0$

(e) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{1 - x}$ en el punt $a = 0$

181. Expresseu els polinomis que apareixen en el problema anterior en potencies de $x - 3$

182. Sigui f i g dues funcions n vegades derivables a un punt a. Demostreu que el polinomi de Taylor $P_{n,fg,a}$ s'obté quan multipliquem els polinomis $P_{n,f,a}$ i $P_{n,g,a}$ i eliminem els termes de grau més gran que n.

183. Sigui f una funció n vegades derivable a l'origen, k un nombre natural i $g(x) = f(x^k)$. Demostreu que si $m \leq kn$ aleshores $P_{m,g,0}$ coincideix amb el polinomi que s'obté al eliminar els termes de grau més gran que m a $P_{n,f,0}(x^k)$.

184. Feu servir els dos problemes anteriors per calcular el polinomi de Taylor a l'origen del grau indicat de les funcions següents.

(a) $f(x) = x^2 \sin(x^3)$, $n = 15$

(b) $f(x) = e^x \cos(x^2)$, $n = 6$

185. Calculeu els límits següents.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^3) - x^3}{x(1 - \cos(x^4))}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^4} - e^{x^2}}{1 - \cos(x^2)}$.

186. Acoteu el error que es comet al utilitzar les següents fórmules d'aproximació

(a) $e^x \simeq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$ per $0 \leq x \leq 1$

(b) $\tan x \simeq x + \dfrac{x^3}{6}$ per $|x| \leq 0,1$

187. Per a quins x és vàlida la fórmula $\ln(1 + x) \simeq x - \dfrac{x^2}{2}$ amb una exactitud de 10^{-5}?

188. Calculeu les següents quantitats amb la precisió que s'indica:

(a) $\sin(1)$ amb un error menor que 10^{-3}.

(b) e amb en error menor que 10^{-9}.

189. (a) Demostreu que $\pi/4 = \arctan 1/2 + \arctan 1/3 = 4 \arctan 1/5 - \arctan 1/239$.

(b) Demostreu que $\pi = 3,14159...$

190. Utilitzeu els desenvolupaments de Taylor adients per a calcular els següents límits.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2) - x^2 \cos x}{x^4}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

(d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x - (x-1)}{x-1}$

191. Demostreu que si $x \leq 0$, aleshores

$$|\int_0^x \frac{e^t (x-t)^n}{n!} dt| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

192. Demostreu que si $-1 \leq x \leq 0$, aleshores

$$|\int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}$$

193. Proveu les següents desigualtats:

(a) $e^x > x+1$ per $x \neq 0$.

(b) $1 + x/2 - x^2/8 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + x/2$ per $x > 0$.

(c) $x^2 - x^6/6 < \sin(x^2) < x^2$ per $x \neq 0$.

194. Proveu la fórmula

$$\sqrt{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r, \quad a > 0, x > 0, n \geq 2$$

on r depend de n, a, x i és tal que

$$0 < r < \frac{(n-1)x^2}{2n^2 a^{2n-1}}.$$

195. Sigui f tal que $f'' = f, f(0) = f'(0) = 0$. Demostreu que $f(x) = 0$ per tot x.

196. Sigui $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Demostreu per inducció que $f^{(n)}(x) = R_n(x)e^{-1/x^2}$, per $x \neq 0$, on $R_n(x)$ és una funció racional. Deduïu que f és $\mathcal{C}^\infty$ a 0 i que $f^{(n)}(0) = 0$. Com és el polinomi de Taylor de grau n de f centrat en el zero?

197. Sigui $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

(a) Comproveu que per tot $n \in \mathbf{N}$ es té

$$f(x) = 1 - x^4 + x^8 - \ldots + (-1)^n x^{4n} + \frac{(-1)^{n+1}x^{4n+4}}{1+x^4}.$$

(b) Demostreu que el polinomi de Taylor de grau $4n$ de f a l'origen ve donat per

$$P_{4n} = 1 - x^4 + x^8 - \ldots + (-1)^n x^{4n}.$$

Quins són els polinomis de Taylor de grau $4n+1, 4n+2$ i $4n+3$?

(c) Deduïu una fórmula per la derivada enésima de f a 0.

(d) Si denotem amb $R_n(x)$ el reste del Polinomi de Taylor de grau n, demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

sempre que $|x| < 1$.

198. Sigui $\alpha > 0$ i no enter. Per cada $n \in \mathbf{N}$ definim

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

(a) Proveu que el polinomi de Taylor de grau n de $f(x) = (1+x)^\alpha$ en el 0 és

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i} x^i,$$

i que les fórmules de Lagrange i Cauchy del reste venen donades per

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}(1+t)^{\alpha-n-1} = (n+1)\binom{\alpha}{n+1} x(1+s)^{\alpha-1}\left(\frac{x-s}{1+s}\right)^n$$

per a certs t i s entre x i 0.

(b) Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

per tot $x \in (-1,1)$. (Indicació: Proveu primer que $\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 0$ sempre que $|x| < 1$.)

(c) Calculeu

$$\sqrt[5]{1.1}$$

amb un error menor que 0.001.

199. Sigui f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ en un entorn de $x_0 \in \mathbf{R}$, amb $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Sigui $x_0 < \xi(h) < x_0 + h$ verificant

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi(h))}{n!}h^n.$$

Si posem $\xi(h) = x_0 + \theta(h)h$ amb $0 < \theta(h) < 1$, proveu que

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \frac{1}{n+1}.$$

200. (a) Demostreu que si $f''(a)$ existeix, aleshores

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

(b) Sigui $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$, i $f(x) = -x^2$ si $x < 0$. Demostreu que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2}$$

existeix encara que $f''(0)$ no existeix.

201. Determineu a i b per tal que la relació

$$x - (a + b\cos x)\sin x = O(x^n)$$

sigui vàlida amb el màxim valor possible de n.

202. Sigui f una funció $\mathcal{C}^2$ a $[0,1]$ amb $f(1) = 10$, $f(0) = 2$ i $f''(x) \leq 2$ per $x \in (0,1)$. Demostreu que f és creixent en un entorn de l'origen.

203. Proveu la següent desigualtat:

$$|(1+x)^{1/3} - (1 + x/3 - x^2/9)| \leq \frac{5x^3}{81}$$

si $x > 0$.

204. Per quins valors de x és vàlida la següent estimació:

$$|\ln(1+x) - x + x^2/2| < 10^{-5}$$

205. (a) Sigui $a \in \mathbf{R}$ i f una funció dos vegades derivable a (a, ∞). Si M_0, M_1 i M_2 són els suprems de $|f(x)|$, $|f'(x)|$ i $|f''(x)|$, proveu que $M_1^2 \leq 4M_0M_2$.

(b) Fent servir la funció $f(x) = 2x^2 - 1$ si $x \in (-1, 0)$ i $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ si $x \in [0, \infty]$ proveu que la igualtat $M_1^2 = 4M_0M_2$ es pot complir.

206. Representeu gràficament les següents funcions:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$

(b) $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$

(c) $f(x) = \dfrac{x \sin(2x)}{1 + x^2}$

(d) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

(e) $f(x) = |x|e^{-x^2/2}$

(f) $f(x) = x^{2n}e^{-x^2/2}$

207. Estudieu si l'origen és un extrem relatiu de la funció

$$f(x) = \ln(1 + x^3) - x^3 + \frac{\sin(x^6)}{2}$$

VIII. Integral de Riemann

1. Construcció de la integral de Riemman

Sigui $I = [a, b]$ un interval. Una partició P de I és una col.lecció finita de punts $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ del interval. Sigui $f : I \longrightarrow R$ una funció acotada. Definim la *suma inferior de f associada a la partició P* com

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$

on

$$m_i = \inf\{f(x_i) : \ x_i \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Anàlogament definim la *suma superior de f associada a la partició P* com

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

on

$$M_i = \sup\{f(x_i) : \ x_i \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Observeu que sempre $L(f, P) \leq U(f, P)$ ja que $m_i \leq M_i$ per tot $i = 1, \ldots n$. El nostre primer objectiu es provar que qualsevol suma inferior és menor o igual que qualsevol suma superior.

Diem que una partició P és més fina que una partició Q ($P \succ Q$) si $P \supset Q$.

Proposició 1. *Sigui f acotada a I i siguin P i Q particions de I amb $P \succ Q$. Aleshores $L(f, P) \geq L(f, Q)$ i $U(f, P) \leq U(f, Q)$.*

Prova. Provarem sols la primera desigualtat, l'altra es demostra de manera similar. Sigui $Q = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ i considerem primer el cas en que P té exactament un punt més que Q, és a dir, $P = Q \cup \{t\}$. Sigui $k < n$ amb $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Tindrem aleshores:

$$L(f, Q) = m_1(t_1 - t_0) + \ldots m_k(t_k - t_{k-1}) + \ldots m_n(t_n - t_{n-1})$$

i

$$L(f, P) = m_1(t_1 - t_0) + \ldots m'_k(t - t_{k-1}) + m''_k(t_k - t) + \ldots m_n(t_n - t_{n-1})$$

on $m'_k = \inf\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t]\}$ i $m''_k = \inf\{f(x) : x \in [t, t_k]\}$. Observeu que $m_k \leq m'_k$ i que $m_k \leq m''_k$. Així doncs tindrem

$$\begin{aligned} L(f,P) - L(f,Q) &= m'_k(t - t_{k-1}) + m''_k(t_k - t) - m_k(t_k - t_{k-1}) \\ &= (m'_k - m_k)(t - t_{k-1}) + (m''_k - m_k)(t_k - t) \geq 0. \end{aligned}$$

Obtenim per tant $L(f,P) \geq L(f,Q)$. Sigui ara P una partició qualsevol amb $P \succ Q$. Podem posar $P = Pm \succ P_{m-1} \succ \ldots \succ P_0 = Q$ on P_j és una partició que té exactament un punt més que P_{j-1}. Pel que hem provat abans tindrem

$$L(f,P) \geq L(f,P_{m-1}) \geq \ldots \geq L(f,P_1) \geq L(f,Q).$$

$\square$

Corol.lari 2. *Sigui f acotada a I i P i Q dues particions de I. Aleshores $L(f,P) \leq U(f,Q)$.*

Prova. Considerem la partició $P \cup Q$. Tindrem $P \cup Q \succ P$ i $P \cup Q \succ Q$ i per la proposició anterior obtenim

$$L(f,P) \leq L(f,P \cup Q) \leq U(f,P \cup Q) \leq U(f,Q).$$

$\square$

Sigui $I = [a,b]$ i f acotada en I. Definim $\mathcal{L} = \{L(f,P) : P \text{ partició de } I\}$ i $\mathcal{U} = \{U(f,P) : P \text{ partició de } I\}$. Observeu que $\mathcal{L}$ és un conjunt fitat superiorment per qualsevol suma superior. Podem doncs considerar el $\sup \mathcal{L}$ que anomenarem la *integral inferior de f a I* i denotarem per

$$\underline{\int_a^b} f.$$

Per altra banda $\mathcal{U}$ està fitat inferiorment per qualsevol suma inferior i podem considerar el $\inf \mathcal{U}$ que anomenarem la *integral superior de f a I* i denotarem per

$$\overline{\int_a^b} f.$$

Observeu que d'aquestes definicions es desprén que $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Definició. *Sigui f acotada a $I = [a,b]$. Diem que f és integrable a I si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$*

El següent criteri és útil per decidir si una funció és integrable.

Lema 3. *Sigui f acotada a I. Aleshores f és integrable en I si i només si per tot $\varepsilon > 0$ existeix una partició P de I amb $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.*

Prova. Suposem f integrable en I i sigui $\varepsilon > 0$. Com que $\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,Q) : Q$ partició de $I\}$ existirà una partició Q amb $U(f,Q) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon/2$. De la mateixa manera existirà una partició P amb $\underline{\int_a^b} f - L(f,P) < \varepsilon/2$. Com que f és integrable tindrem $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ i per tant $U(f,Q) - L(f,P) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Considerem ara la partició $P \cup Q$. Tindrem

$$U(f, P \cup Q) - L(f, P \cup Q) \leq U(f,Q) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Suposem ara f no integrable, és a dir $\overline{\int_a^b} f \neq \underline{\int_a^b} f$. Sigui $K = \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f$. Aleshores $U(f,P) - L(f,P) > K$ per tota partició P i per tant la condició de l'enunciat no es verifica per $\varepsilon < K$. □

Passem ara a veure que dues classes importants de funcions (les monòtones i les contínues) són integrables.

Teorema 4. *Sigui f monòtona i fitada a $I = [a,b]$. Llavors f és integrable en I.*

Prova. Suposem f creixent (el cas decreixent es demostraria de manera similar). Sigui $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partició de I. Observem que $m_i = f(t_{i-1})$ i $M_i = f(t_i)$. Sigui $\varepsilon > 0$ i $\delta = \varepsilon/(f(b) - f(a))$ (fixeu-vos que $f(b) - f(a) > 0$ ja que f és creixent). Considerem una partició $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ per $i = 1 \ldots n$. Tindrem

$$\begin{aligned}
U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) < \delta \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) \\
&= \delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Per provar que una funció contínua és integrable necessitem introduir un nou concepte. Sigui $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ amb I un interval no necessàriament acotat de $\mathbf{R}$. Diem que f és *uniformement contínua* a I si per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ sempre que $|x - y| < \delta$. Observeu que una funció uniformement contínua és contínua però que el recíproc no és cert (considereu la funció $f(x) = 1/x$ a $I = (0,1)$). El següent teorema afirma que quan I és un interval tancat els dos conceptes són equivalents.

Teorema 5. *Sigui $I = [a,b]$ i f contínua en I. Aleshores f és uniformement contínua a I.*

Prova. Suposem que f no fos uniformement contínua i sigui $\varepsilon > 0$ tal que per tot $\delta > 0$ existeixen punts $x, y \in I$ amb $|x - y| < \delta$ i $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Per cada $n \in \mathbf{N}$ siguin x_n, y_n amb $|x_n - y_n| < 1/n$ i $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Per el teorema de Bolzano-Wierstrass la successió x_n té una parcial convergent a un punt $l \in I$ que denotarem per x_{k_n}. Com que $|x_n - y_n| < 1/n$ la corresponen parcial y_{k_n} convergeix també a l. Tindrem doncs dues successions que convergeixen a l però tals que $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}))| \geq \varepsilon$. Això contradiu la continuïtat de f a l. $\square$

Ara ja estem en condicions de provar el següent teorema.

Teorema 6. *Sigui f continua en $I = [a, b]$. Aleshores f és integrable en I.*

Prova. Considerem $\varepsilon > 0$. Com que f és contínua en I pel teorema anterior és uniformement contínua. Llavors existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$ sempre que $|x-y| < \delta$. Considerem ara una partició $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de I tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ per $i = 1, \dots, n$. Observeu que per tot $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ es complirà $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$ i per tant $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$. Tindrem,

$$
\begin{aligned}
U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

$\square$

2. Comportament de la integral respecte operacions elementals

Proposició 7. *Sigui f i g integrables en $I = [a, b]$. Llavors $f + g$ és integrable en I i*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Prova. Sigui $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partició de I i siguin

$$
\begin{aligned}
m_i &= \inf\{(f+g)(x) : \ x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\
m_i' &= \inf\{f(x) : \ x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\
m_i'' &= \inf\{g(x) : \ x \in [t_{i-1}, t_i]\}
\end{aligned}
\quad .
$$

Definim M_i, M_i' i M_i'' de manera anàloga. Observeu que $m_i \geq m_i' + m_i''$ i que $M_i \leq M_i' + M_i''$. Així doncs tindrem

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P)$$

i per tant

$$U(f+g,P) - L(f+g,P) \le U(f,P) - L(f,P) + U(g,P) - L(g,P).$$

Considerem $\varepsilon > 0$. Com que f i g son integrables existiran particions P_1 i P_2 de I amb $U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon/2$ i $U(g,P_2) - L(g,P_2) < \varepsilon/2$. Sigui $P = P_1 \cup P_2$. Tindrem que

$$U(f+g,P) - L(f+g,P) \le U(f,P) - L(f,P) + U(g,P) - L(g,P) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Això prova que $f+g$ és integrable. Sigui ara P una partició qualsevol de I. Tindrem

$$L(f,P) + L(g,P) \le L(f+g,P) \le \int_a^b (f+g) \le U(f+g,P) \le U(f,P) + U(g,P)$$

i per altra banda

$$L(f,P) + L(g,P) \le \int_a^b f + \int_a^b g \le U(f,P) + U(g,P).$$

Deduïm doncs que per qualsevol partició P es verificarà

$$\left| \int_a^b (f+g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| \le U(f,P) - L(f,P) + U(g,P) - L(g,P).$$

Ara bé, el últim terme d'aquesta desigualtat es pot fer tan petit com vulguem prenent la partició P prou fina. Obtenim doncs

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

$\square$

Proposició 8. *Sigui f integrable a I i $c \in \mathbf{R}$. Aleshores cf és integrable a I i $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.*

Prova. Fem només el cas $c > 0$ l'altra cas es deixa pel lector. Sigui $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partició de I i siguin m_i, m_i', M_i i $M'i$ els respectius ínfims i suprems de f i cf en els intervals corresponents. Clarament $m_i' = cm_i$ i $M_i' = cM_i$ (què passa quan $c < 0$?). Tindrem doncs que

$$U(cf,P) - L(cf,P) = c(U(f,P) - L(f,P)).$$

Considerem $\varepsilon > 0$ i sigui P amb $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon/c$ (aquesta partició existeix ja que per hipòtesis f és integrable). Llavors

$$U(cf,P) - L(cf,P) < c\varepsilon/c = \varepsilon.$$

Això prova que cf és integrable a I. Per altra banda tindrem

$$cL(f,P) = L(cf,P) \leq \int_a^b cf \leq U(cf,P) = cU(f,P)$$

i

$$cL(f,P) \leq c\int_a^b f \leq cU(f,P).$$

Deduïm doncs que

$$\left|\int_a^b cf - c\int_a^b f\right| \leq c\,(U(f,P) - L(f,P))\,.$$

Com que el darrer terme d'aquesta desigualtat el podem fer tan petit com vulguem, deduïm que

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f.$$

□

Teorema 9. *Sigui f integrable en $[a,b]$ amb $f([a,b]) \subset [c,d]$ i g contínua en $[c,d]$. Llavors $g \circ f$ és integrable en I.*

Prova. Sigui $K = \max\{|g(x)| : x \in [c,d]\}$. Considerem $\varepsilon > 0$. Com que g és uniformement contínua, existeix $\delta > 0$ tal que $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a+2K}$ sempre que $|x - y| < \delta$. Podem escollir δ de manera que $\delta < \frac{\varepsilon}{b-a+2K}$. Com que f és integrable escollim $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ partició de $[a,b]$ amb $U(f,P) - L(f,P) < \delta^2$. Siguin m_i, m_i', M_i i M_i' els ínfims i suprems de f i $g \circ f$ en els corresponents intervals de la partició. Dividim el conjunt de índex $1, 2, \ldots, n$ en dos subconjunts I i J de la següent manera. En el subconjunt I considerem els index i tals que $M_i - m_i < \delta$. En el subconjunt J considerem els index i tals que $M_i - m_i \geq \delta$. Fixeu-vos que si $i \in I$ aleshores $M_i' - m_i' < \frac{\varepsilon}{b-a+2K}$. Per altra banda tindrem

$$\begin{aligned}\delta\sum_{i\in J}(t_i - t_{i-1}) &= \sum_{i\in J}\delta(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i\in J}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) = U(f,P) - L(f,P) < \delta^2,\end{aligned}$$

Obtenim doncs que

$$\sum_{i\in J}(t_i - t_{i-1}) < \delta$$

i per tant

$$\begin{aligned}
&U(g\circ f,P)-L(g\circ f,P)=\sum_{i=i}^{n}(M_i'-m_i')(t_i-t_{i-1})=\\
&\sum_{i\in I}(M_i'-m_i')(t_i-t_{i-1})+\sum_{i\in J}(M_i'-m_i')(t_i-t_{i-1})<\\
&<\frac{\varepsilon}{b-a+2K}\sum_{i\in I}(t_i-t_{i-1})+\sum_{i\in J}2K(t_i-t_{i-1})<\\
&<\frac{\varepsilon}{b-a+2K}(b-a)+2K\delta<\varepsilon.
\end{aligned}$$

Això prova que $g\circ f$ és integrable en $[a,b]$. ☐

Corol.lari 10. *Sigui f integrable en $[a,b]$. Aleshores f^2 també ho és. Si existeix $\delta>0$ amb $f(x)>\delta$ per tot $x\in[a,b]$ llavors $\frac{1}{f}$ també és integrable.*

Prova. La funció f^2 s'obté al composar f amb la funció $g(x)=x^2$ que és continua. Per el Teorema 9 hom obté que f^2 és integrable.

La funció $\frac{1}{f}$ s'obté al composar f amb la funció $h(x)=\frac{1}{x}$ que és continua a $[\delta,M]$ ($M=\sup\{f(x):\ x\in[a,b]\}$). Pel Teorema 9 obtenim que $\frac{1}{f}$ és integrable en $[a,b]$. ☐

Corol.lari 11. *Siguin f,g integrables en $[a,b]$. Llavors fg és integrable en $[a,b]$.*

Prova. Tenim que

$$fg=\frac{(f+g)^2-f^2-g^2}{2},$$

i per les proposicions 7, 8 i el corol.lari anterior es dedueix la integrabilitat de fg. ☐

3. Algunes desigualtats.

Proposició 12. *Siguin f,g integrables en $[a,b]$ amb $f(x)\le g(x)$ per tot $x\in[a,b]$. Aleshores $\int_a^b f\le\int_a^b g$.*

Prova. N'hi ha prou amb veure que $\int_a^b(g-f)\ge 0$. Per això només cal observar que $(g-f)(x)\ge 0$ per tot $x\in[a,b]$ i per tant qualsevol suma inferior és positiva. Com que la integral és el suprem de les sumes inferiors deduïm que la integral de $g-f$ és positiva. ☐

Corol.lari 13. *Sigui f integrable en $[a,b]$ amb $m\le f(x)\le M$ per tot $x\in[a,b]$. Aleshores $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$. Si a més f és contínua aleshores existeix $c\in[a,b]$ amb $\int_a^b f=f(c)(b-a)$*

Prova. Per provar la primera part nomes cal aplicar la proposició anterior a les funcions constants $g(x) = m$, $h(x) = M$ i a $f(x)$. Suposem ara que f és contínua. Podem aplicar la part anterior prenent $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ i $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Observem que per el Teorema de Wierstrass $M = f(x)$ i $m = f(y)$ per a certs $x, y \in [a,b]$. Tindrem

$$f(y) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq f(x)$$

i pel teorema de Bolzano existirà un punt c entre x i y tal que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c)$. □

Proposició 14. *Si f és integrable en $[a,b]$ aleshores $|f|$ també ho és i*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Prova. La funció $|f|$ no és més que la composició de f amb $g(x) = |x|$ que és contínua. Aplicant el Teorema 9 obtenim que $|f|$ és integrable. Per altra banda aplicant la Proposició 12 a la següent desigualtat

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

obtenim

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

d'on es desprén el resultat enunciat. □

Proposició 15. *Sigui f una funció integrable en $[a,b]$ i g una funció definida en $[a,b]$ diferent de f només en un nombre finit de punts. Aleshores g és integrable i*

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Prova. N'hi ha prou amb veure que una funció h que val zero a tots els punts tret d'un nombre finit, és integrable i $\int_a^b h = 0$. Sigui h una funció amb aquestes propietats i siguin $x_1, \ldots x_m$ els punts on h és diferent de zero. Sigui $M = \max\{|h(x_1)|, \ldots, |h(x_m)|\}$. Considerem $\varepsilon > 0$ i sigui $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partició de $[a,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} < \frac{\varepsilon}{2mM}$. Tindrem que

$$U(h,P) - L(h,P) \leq m2M\frac{\varepsilon}{2mM} = \varepsilon.$$

Així doncs h és integrable. Per altra banda per qualsevol partició P tindrem que

$$L(h,P) \leq 0 \leq U(h,P)$$

i per tant $\int_a^b h = 0$. □

Proposició 16. Sigui f integrable en $[a, c]$ i $b \in (a, c)$. Aleshores f és integrable en $[a, b]$ i en $[b, c]$ i

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Recíprocament si f és integrable en $[a, b]$ i en $[b, c]$ llavors és integrable en $[a, c]$ i val la mateixa igualtat.

Prova. Suposem que f és integrable en $[a, c]$ i sigui $\varepsilon > 0$. Considerem una partició P de $[a, c]$ amb $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$. Sigui P' la partició de $[a, c]$ obtinguda al afegir b a P. Com que P' és més fina que P tindrem que $U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon$. Ara bé, la partició P' es pot descompondre en dues particions P_1 i P_2 una de l'interval $[a, b]$ i l'altra de l'interval $[b, c]$. Així tindrem

$$\varepsilon > U(f, P') - L(f, P') = U(f, P_1) - L(f, P_1) + U(f, P_2) - L(f, P_2)$$

i per tant

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \varepsilon \text{ i } U(f, P_2) - L(f, P_2) < \varepsilon$$

obtenint així que f és integrable en $[a, b]$ i en $[b, c]$.

Considerem ara una partició qualsevol P de $[a, c]$. Podem considerar que $b \in P$ (si no és així, afegim el punt b a la partició. Siguin P_1 i P_2 les corresponents particions en els intervals $[a, b]$ i $[b, c]$. Tindrem

$$L(f, P) \leq \int_a^c f \leq U(f, P)$$

i, per altra banda

$$L(f, P) = L(f, P_1) + L(f, P_2) \leq \int_a^b f + \int_b^c f \leq U(f, P_1) + U(f, P_2) = U(f, P).$$

Així tindrem

$$\left| \int_a^c f - \left(\int_a^b f + \int_b^c f \right) \right| \leq U(f, P) - L(f, P).$$

Com que el segon terme d'aquesta desigualtat es pot fer tant petit com vulguem, prenent P prou fina, deduïm que

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

La prova del recíproc es deixa pel lector. $\square$

Fins ara la notació $\int_a^b f$ només té sentit quan $a < b$. Quan $a > b$ convindrem en que $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Sigui f integrable en $[a, b]$. Aleshores per la proposició anterior f és integrable en $[a, x]$ per tot $x \in [a, c]$ i té sentit definir la següent funció

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Teorema 17 (Teorema fonamental del Càlcul). Si f és integrable en $[a, b]$, aleshores

$$F(x) = \int_a^x f$$

és continua en $[a, b]$. Si a més f és continua en $c \in [a, b]$ aleshores F és derivable en c i $F'(c) = f(c)$

Prova. Sigui $x \in [a, b]$. Hem de provar que $\lim_{h\to 0} F(x + h) - F(x) = 0$. Sigui $M = \max\{|f(y)| : y \in [a, b]\}$. Si $h > 0$ per la proposició anterior tindrem que

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f.$$

Usant el Corol.lari 13 tindrem

$$-Mh \leq \int_x^{x+h} f \leq Mh$$

i per tant

$$-Mh \leq F(x + h) - F(x) \leq Mh$$

és a dir

$$|F(x + h) - F(x)| \leq M|h|$$

Si $h < 0$, $F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} f = -\int_{x+h}^x f$. Usant altra vegada el Corol.lari 13 tindrem

$$Mh \leq F(x + h) - F(x) \leq M(-h).$$

Així doncs independentment del signe de h tindrem

$$|F(x + h) - F(x)| \leq M|h|$$

i per tant $\lim_{h\to 0} F(x + h) - F(x) = 0$. Això prova la continuïtat de F.

Suposem ara f continua a $c \in (a, b)$ i estudiem el següent limit:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c + h) - F(c)}{h}.$$

Considerem primer $h > 0$. Siguin $M_h = \sup\{f(x) : x \in [c, c+h]\}$ i $m_h = \inf\{f(x) : x \in [c, c+h]\}$. Tindrem que

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f$$

i usant una altra vegada el Corol.lari 3.2

$$m_h h \leq F(c+h) - F(c) \leq M_h h$$

i per tant

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

La mateixa desigualtat s'obté per $h < 0$ anant amb cura amb els signes i els sentits de les desigualtats. Així doncs obtenim

$$\lim_{h\to 0} m_h \leq \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq \lim_{h\to 0} M_h.$$

Ara bé

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(c)$$

ja que f és contínua a c i obtenim el resultat desitjat. Si $c = a$ (resp. $c = b$) la mateixa demostració amb els retocs necessaris prova que F és derivable per la dreta (resp. esquerra) i que $F'(c) = f(c)$. □

El Teorema fonamental del Càlcul és especialment interessant en el cas en que f és contínua en tot l'interval $[a, b]$. En aquest cas, ens diu que F és derivable i que $F' = f$. Una funció que verifica que la seva derivada és f s'en diu una *primitiva* de f. Amb aquest llenguatge el Teorema fonamental afirma que tota funció contínua en un interval tancat té una primitiva. Fixeu-vos que si una funció f té primitiva g, aquesta no és única ja que $g + k$ es també una primitiva per tot $k \in \mathbf{R}$.

Corol.lari 18. *Sigui f contínua en $[a, b]$ i G una primitiva de f. Llavors $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.*

Prova. Considerem $F(x) = \int_a^x f$. Per el Teorema fonamental del Càlcul sabem que $F'(x) = f(x)$. Així doncs $0 = F'(x) - G'(x) = (F - G)'(x)$ i per tant $F - G = k$ per una certa $k \in \mathbf{R}$. Per calcular aquesta constant avaluem $F - G$ en a i tindrem

$$k = (F - G)(a) = \int_a^a f - G(a) = -G(a).$$

Així doncs,

$$\int_a^b f = F(b) = G(b) + k = G(b) - G(a).$$

□

Aquest Corol.lari es pot generalitzar substituint la continuïtat de f per la integrabilitat i amb la hipòtesi de que f té una primitiva.

Teorema 19. *Sigui f integrable en $[a,b]$ i G una primitiva de f. Aleshores $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.*

Prova. Sigui $P = \{t_o, \ldots, t_n\}$ una partició qualsevol de $[a,b]$ i m_i i M_i els ínfims i suprems de f en els intervals corresponents. Pel teorema del valor mig tindrem

$$G(t_i) - G(t_{i-1}) = G'(x_i)(t_i - t_{i-1}) = f(x_i)(t_i - t_{i-1})$$

per a certs $x_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Per altra banda tindrem

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$$

i per tant

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq G(t_i) - G(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Sumant aquestes desigualtats de $i = 1$ fins a $i = n$ obtenim

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} G(t_i) - G(t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

és a dir

$$L(f,P) \leq G(b) - G(a) \leq U(f,P).$$

Com que f és integrable, això implica que

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

□

Corol.lari 20 (Integració per parts). Siguin f, g integrables en $[a,b]$ que tenen primitives F i G respectivament. Aleshores es compleix:

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG.$$

Prova. Es deixa al lector. □

Corol.lari 21 (Canvi de variable). Sigui $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$, derivable, amb derivada contínua i tal que $\varphi(c) = a$ i $\varphi(d) = b$. Sigui f contínua en $[a,b]$. Aleshores es compleix:

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Prova. Es deixa al lector. □

5. Sumes de Riemann

Sigui $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partició de $[a, b]$. Una *suma de Riemann de* f, $S(f, P)$, associada a la partició P és qualsevol nombre obtingut de la següent manera:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}),$$

on $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Fixeu-vos que donada una partició no hi ha una única suma de Riemann associada ja que les sumes de Riemann depenen dels punts x_i escollits. De totes maneres sempre és cert que

$$L(f, P) \leq S(f, P) \leq U(f, P).$$

El següent teorema està formulat per funcions contínues però és cert per funcions integrables. No donarem aquí la demostració més general.

Teorema 22. *Sigui f continua en $[a, b]$. Aleshores per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ és una partició de $[a, b]$ amb $t_i - t_{i-1} < \delta$ llavors*

$$\left| \int_a^b f - S(f, P) \right| < \varepsilon$$

per tota suma de Riemann associada a P.

Prova. Considerem $\varepsilon > 0$ i sigui $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$ sempre que $|x - y| < \delta$ (usem aquí la continuïtat uniforme de f). Sigui ara $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partició de $[a, b]$ amb $t_i - t_{i-1} < \delta$ i $S(f, P)$ una suma de Riemann associada a la partició P. Tindrem que

$$L(f, P) \leq \int_a^b f \leq U(f, p)$$

i per altra banda

$$L(f, P) \leq S(f, P) \leq U(f, P)$$

d'on deduïm que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f - S(f, P) \right| & \leq U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \\ & < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{(b-a)}(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Corol.lari 23. *Sigui f continua en $[a,b]$ i sigui P_n una successió de particions de $[a,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} < 1/n$ sempre que t_i i t_{i-1} siguin punts consecutius de P_n. Aleshores per tota elecció $S(f,P_n)$ de sumes de Riemann associades a les particions P_n es té que*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n).$$

Prova. Es deixa al lector.

Problemes.

208. Calculeu les següents integrals aplicant directament la definició

(a) $\int_0^b x^2\,dx$ (indicació: $\sum_1^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$).

(b) $\int_0^b x^3\,dx$ (indicació: $\sum_1^n k^3 = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2$).

(c) $\int_0^b x^\alpha\,dx$, $\alpha > 0$.

209. Decidiu si les següents funcions són integrables o no en $[0,2]$.

(a) $f(x) = x$ si $0 \le x < 1$ i $f(x) = x-2$ si $1 \le x \le 2$.

(b) $f(x) = x + [x]$.

(c) $f(x) = 1$ si $x = a + b\sqrt{3}$ on a i b són racionals i 0 si $x \ne a + b\sqrt{3}$.

210. (a) Sigui f una funció fitada en $[a,b]$ i integrable en $[a,c]$ per a tot c amb $a < c < b$. Demostreu que f és integrable en $[a,b]$ i que es compleix $\int_a^b f = \lim_{c\to b} \int_a^c f$.

(b) Estudieu si la funció definida sobre $[0,1]$ com $f(x) = \cos(\frac{\pi}{x})$, $0 < x \le 1$, i $f(0) = 0$ és integrable.

211. Demostreu que $\int_{cb}^{ca} f(t)dt = c\int_b^a f(ct)dt$

212. Demostreu que

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}dt > 0$$

per a tot $x > 0$,

213. Sigui f estrictament creixent i continua a $[a,b]$ i sigui $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ una partició de $[a,b]$. Sigui $P'=\{f(t_0),\dots,f(t_n)\}$. Demostreu que

$$U(f^{-1},P')+L(f,P)=bf(b)-af(a).$$

Deduïu que

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}=bf(b)-af(a)-\int_a^b f$$

Sabríeu fer una demostració més simple d'aquest fet, si f és $\mathcal{C}^1$?

214. Sigui $a_n\in[0,1]$ una successió convergent. Considereu

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=a_n \text{ per algun } n\ ,\\ 0 & \text{en cas contrari.}\end{cases}$$

Proveu que f és integrable en $[0,1]$ i que $\int_0^1 f=0$

215. Proveu que la funció f definida en $[0,1]$ per $f(x)=0$ si x és irracional i $f(x)=1/n$ si $x=m/n\in\mathbf{Q}$, amb m/n fracció irreductible, és integrable i $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

216. Proveu que la funció f definida en $[0,1]$ per $f(x)=0$ excepte pels punts de la forma $\frac{1}{n}$, $n\geq 1$ on val 1, és integrable i $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

217. Utilitzant les sumes de Riemann, calculeu els següents límits

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^r+2^r+\cdots+n^r}{n^{r+1}}$ on $r\in\mathbf{R}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+n-1)}}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{2n}}$.

218. Sigui $J=[-a,a], a>0$ i sigui $f:J\longrightarrow\mathbf{R}$ una funció integrable sobre J. Demostreu:

(a) Si f és parella, és a dir $f(x)=f(-x)$ llavors $\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$.

(b) Si f és senar, és a dir $f(x)=-f(-x)$ llavors $\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$.

219. Suposeu que f és integrable en $[a,b]$. Demostreu que hi ha un nombre $x\in[a,b]$ tal que $\int_a^x f=\int_x^b f$. Comproveu que no sempre és $x\in(a,b)$.

220. Calculeu $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k}{\sqrt{n^4+kn^3}}$.

221. Suposem f i g integrables en $[a, b]$. Proveu la *desigualtat de Cauchy-Schwarz*:

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

Si val la igualtat cal que existeixi $\lambda \in \mathbf{R}$ amb $f = \lambda g$? I si f i g són continues?

222. Suposem que f és contínua i $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. Demostreu que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = a.$$

223. Sigui $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció positiva que té derivada contínua i satisfà la desigualtat

$$f(x) \leq f(t) + f'(t)(x - t) \text{ per a tot } x, t \in [a, b]. \qquad (1)$$

(a) Demostreu que

$$(f(a) + f(b))\frac{(b - a)}{2} \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b - a)f(\frac{a + b}{2}).$$

(b) Demostreu que si la derivada f' de f és decreixent, llavors (1) val.

(c) Proveu que si $f(x) = \log x$ llavors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_n^{n+1} f(x)dx}{f(\frac{2n+1}{2})} = 1.$$

224. (a) Si f és continua en $[a, b]$ i $f(x) > 0$ per a tot $x \in [a, b]$, llavors $\dfrac{1}{f}$ és integrable.

(b) L'apartat (a) és fals si suposem que f és solament integrable.

225. Calculeu $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n (1 + \frac{k^2}{n^2})^{\frac{1}{n}}$.

226. Utilitzeu el mètode d'integració per parts per a calcular

(a) $\int (\log x)^3\, dx$ (b) $\int \cos(\log x)\, dx$ (c) $\int \sqrt{x} \log x\, dx$

(d) $\int x^3 e^{x^2}\, dx$ (e) $\int x(\log x)^2\, dx$ (f) $\int \arctan x\, dx$

227. *Lema de Riemman-Lebesgue.* Sigui f una funció amb derivada continua a $[a, b]$. Utilitzant la integració per parts proveu que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t\, dt = 0.$$

228. (a) Sigui f una funció contínua en $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a, b]$. Proveu que si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ llavors $f = 0$.

(b) Doneu un exemple de funció f integrable en $[a, b]$ que compleixi $f(x) \geq 0$, $f \neq 0$ i $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

(c) Sigui f una funció contínua en $[a, b]$ que compleix $\int_a^b fg = 0$ per a totes les funcions contínues g sobre $[a, b]$. Proveu que $f = 0$.

229. (a) Si f és integrable en $[a, b]$ i existeixen $m, M \in \mathbf{R}$ tals que $0 \leq m \leq f(x) \leq M$ per a tot $x \in [a, b]$, llavors

$$m \leq \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)\,dx \right)^{1/2} \leq M$$

(b) Si f és contínua i $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a, b]$, llavors existeix un $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(c) = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)\,dx \right)^{1/2}$$

230. Demostreu que si f és contínua, aleshores

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$$

231. Demostreu que si f és contínua, aleshores

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2 du = \int_0^x \left(\int_0^u \left(\int_0^s f(t)dt \right) ds \right) du$$

232. Sigui $I_{2n} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^{2n} x} dx$. Proveu que per $n \geq 1$ es compleix

$$I_{2n} = \frac{2^{n-1}}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-2}.$$

Aprofiteu aquesta igualtat per a calcular I_4.

233. Calculeu les derivades de les següents funcions

$$(a) \quad g(x) = \int_0^{x^4} \frac{1}{1+t^3}\,dt \qquad (b) \quad f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \cos(\log(2t^2))\,dt$$

$$(c) \quad h(x) = \int_0^{\int_1^{x^2} \sin(t^2)dt} (\sin t^3)\,dt$$

234. Calculeu:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_x^{x^2} \sin(t^2)/t\,dt}{x^2-1}$$

235. Calculeu, si existeix, el valor d'a per tal que el límit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{\log(1+t)-at}{t}dt}{(1-\cos(x/2))^2}$$

sigui finit i diferent de zero.

236. Definim la funció $L : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ per

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad (x>0).$$

Proveu directament que

(a) $L'(x) = 1/x$ per a $x > 0$.

(b) $L(xy) = L(x) + L(y)$ per a $x, y > 0$.

(c) $L(x^n) = nL(x)$ per a $n \in \mathbf{N}$, $x > 0$.

(d) $L(e^y) = y$ i $e^{L(x)} = x$ pr a tot $y \in \mathbf{R}$ i $x > 0$.

237. Una funció f és *periòdica* de *període* a, si $f(x+a) = f(x)$ per a tot x.

(a) Si f és periòdica de període a i integrable en $[0,a]$, demostreu que

$$\int_0^a f = \int_b^{b+a} f$$

per a tot b.

(b) Trobeu una funció f que no sigui periòdica, però que f' ho sigui.

(c) Suposem que f' és periòdica de període a. Demostreu que f és periòdica si i només si $f(a) = f(0)$.

238. Suposem que f' és integrable en $[0,1]$ i $f(0) = 0$. Demostreu que per a tot $x \in [0,1]$ tenim

$$|f(x)| \le \sqrt{\int_0^1 |f'|^2}.$$

239. Calculeu les següents primitives,

(1) $\int \frac{4x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$, (2) $\int \frac{x^3+1}{x^2+6x+10}\,dx$, (3) $\int \frac{x^5+2x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx$,

(4) $\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$, (5) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$, (6) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$,

(7) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$, (8) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x^{1/3}+1}\,dx$, (9) $\int \sin 2x \cos 6x\,dx$,

(10) $\int \sin\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}\,dx$, (11) $\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)}\,dx$, (12) $\int \sqrt{\sin x}\cos^3(x)\,dx$,

(13) $\int \cos^7(x)\,dx$, (14) $\int \frac{\sin^5(x)}{\cos x}\,dx$, (15) $\int \frac{1}{3+5\cos x}\,dx$,

(16) $\int \tan^2 5x\,dx$, (17) $\int \tan^2(x)\sec^4(x)\,dx$, (18) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$,

(19) $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$, (20) $\int \frac{1}{x(1+x^3)^{1/3}}\,dx$, (21) $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x^2+x+1)^2(x-2)}\,dx$,

(22) $\int \frac{x}{\sqrt{4+4x-x^2}}\,dx$, (23) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-9}}\,dx$, ind: Calculeu $(\sec^{-1})'(x)$.

240. Sigui $g:[a,b]\to \mathbf{R}$ contínua. Suposem que existeix $K>0$ tal que

$$|g(x)| \le K\int_a^x |g(t)|\,dt, \text{ per a tot } x\in[a,b].$$

Demostreu que $g=0$. (Indic: considereu el punt $x_0=\sup\{x\le b : g(t)=0, a\le t\le x\}$ i apliqueu el teorema de Weierstrass).

241. Si definim π com l'àrea del cercle unitat, demostreu que l'àrea del cercle de radi r és πr^2.

242. Sigui f una funció integrable no negativa tal que $f(x)=0$ per a $|x|\ge 1$ i tal que $\int_{-1}^1 f=1$. Per $h>0$, sigui

$$f_h(x)=\frac{1}{h}f(x/h).$$

(a) Demostreu que $f_h(x)=0$ per a $x\ge h$ i que $\int_{-h}^h f_h=1$.

(b) Sigui g integrable en $[-1,1]$ i contínua en 0. Demostreu que

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^1 f_h g=\lim_{h\to 0^+}\int_{-h}^h f_h g=g(0).$$

(c) Demostreu que

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}dx=\pi.$$

(d) Sigui φ una funció integrable en $[-1,1]$ i contínua en 0. Demostreu que

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\varphi(x)dx=\pi\varphi(0).$$

243. (a) Demostreu que $\tan x\le \frac{4}{\pi}x$ per tot $x\in[0,\pi/4]$.

(b) Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/4}\tan^n x dx=0.$$

(c) Si posem $I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x dx$ proveu que

$$I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}.$$

(d) Deduïu que

$$\lim_{n\to\infty} 1/2-1/4+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n}=\frac{1}{2}\log 2.$$

244. Donats n i m enters no negatius, definim

$$I_{n,m}=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx.$$

(a) Demostreu que $(n+1)I_{n,m}=mI_{n+1,m-1}$.

(b) Deduïu de l'apartat anterior que $I_{n,m}=\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}$.

(c) Calculeu

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\cos^{2m+1}x dx.$$

245. (a) Demostreu

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x dx$$

(b) Demostreu ara

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

i

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}.$$

(c) Deduïu que

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}xdx}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}xdx}$$

(d) Proveu que el quocient de les dues integrals està comprès entre 1 i $1+\frac{1}{2n}$ i deduïu la següent expressió (producte de Wallis)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

(e) Demostreu també que els productes

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

tendeixen a $\sqrt{\pi}$

246. Calculeu les següents integrals

$(a)\ \int\sqrt{x^2-6x-7}\,dx,\qquad (b)\ \int\frac{1}{\sqrt{16x^2-9}}\,dx,\qquad (c)\ \int\sqrt{81+16x^2}\,dx,$

$(d)\ \int\frac{1}{\sqrt{81+16x^2}}\,dx\qquad (e)\ \int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx.$

247. Calculeu l'àrea de les regions delimitades per

(a) La corba $y=1/(1+x^2)$ i la paràbola $y=x^2/2$,

(b) la hipèrbola $x^2-y^2=9$, l'eix $0x$ i la normal a la hipèrbola que passa per $(5,4)$.

248. Calculeu la longitud de la corba $y=3x^{2/3}-10$ entre $x=8$ i $x=27$.

249. Un disc de radi R roda sense relliscar al llarg de l'eix X. La corba descrita per un punt de la circumferència s'anomena *cicloide*.

(a) Raoneu que les seves equacions són

$$x(t)=R(t-\sin t),\quad y(t)=R(1-\cos t),t\in\mathbf{R}.$$

(b) Calculeu la longitud d'un arc de cicloide descrit en realitzar una rotació completa del disc.

250. Trobeu l'àrea del tor de revolució generat per la circumferència d'equació $(x-a)^2+y^2=R^2$, on $0<R<a$, al girar al voltant de l'eix $0y$. Calculeu també el seu volum.

251. Considerem l'arc de gràfica $y = \cosh x$ per a $x \in [1, 2]$.

(a) Calculeu la seva longitud entre 1 i 2.

(b) Calculeu el volum de revolució que s'obté al girar al voltant de l'eix OX el conjunt $\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \cosh x\}$

(c) Calculeu l'àrea de la superficie de revolució que s'obté al girar al voltant de l'eix OX l'esmentat arc.

252. Calculeu el volum del sòlid de revolució que s'obté al girar al voltant de la recta $y = -p$ la figura delimitada per la paràbola $y^2 = 2px$ i la recta $x = p/2$, $p > 0$.

253. Un sòlid esfèric de radi r es perfora i es fa un forat que té de diàmetre d i d'eix un diàmetre de l'esfera. Calculeu el volum del cos resultant.

254. Calculeu el volum d'un sòlid que té per base un disc de radi 2 i tal que les seccions per plans perpendiculars a un determinat diàmetre del disc són triangles equilàters.