Universitat Autònoma de Barcelona

TITULACIÓ: Matemàtiques
NOM DE L'ASSIGNATURA: 27990 Introducció a l'Àlgebra lineal
CURS: 2002/2003
CRÈDITS: 15

PRESENTACIÓ I OBJECTIUS

Aquesta assignatura està organitzada en quatre parts:
(1) Introducció a la Geometria.
(2) Sistemes d'equacions.
(3) Espais vectorials i aplicacions lineals.
(4) Espais vectorials amb producte escalar.

L'objectiu principal de la primera part és familiaritzar l'alumne amb el fet que totes les afirmacions que apareixen en el món de les matemàtiques s'han de demostrar. En particular, ha de quedar clar què vol dir demostrar. Per això s'enfocarà l'assignatura amb especial èmfasi en el fet de que cada nou teorema o resultat es dedueix de resultats previs per raonaments lògics, i que aquesta cadena ascendent de resultats comença amb uns pocs fets elementals acceptats per tothom.
L'objectiu secundari és introduir a l'estudiant en el món de la geometria i reforçar els coneixements previs que d'ella en té. Pensem que pot ser molt útil revisitar la trigonometria posant especial èmfasi en el perquè de les coses.
L'objectiu principal de la segona part és que l'alumne aprengui a resoldre sistemes d'equacions lineals de manera sistemàtica, però entenent què està fent a cada pas, i que aprengui les eines bàsiques del càlcul matricial.
La tercera part és la part més important del curs. Els objectius d'aquesta part són:
(i) Que l'alumne entengui els espais vectorials com estructura algebraica i les aplicacions lineals com els homomorfismes d'aquesta estructura. Per això és fonamental entendre les definicions d'espai vectorial, subespai vectorial, espai quocient i aplicació lineal, i el teorema de l'isomorfisme.
(ii) Que l'alumne entengui els conceptes d'independència lineal, base i dimensió.
(iii) Que l'alumne aprengui a calcular amb coordenades. Per això és fonamental que l'alumne entengui la relació que hi ha entre un vector i les seves coordenades, i entre una aplicació lineal i les seves matrius associades. Que l'alumne no confongui les coordenades amb el vector que representen, ni una matriu amb l'aplicació lineal que representa.
(iv) Que l'alumne entengui què vol dir classificar un endomorfisme d'un espai vectorial. Que aprengui a decidir quan un endomorfisme és diagonalitzable i quan de forma canònica de Jordan, i en aquests casos que sàpiga diagonalitzar i trobar la forma canònica de Jordan. L'objectiu principal de l'última part és que l'alumne entengui la relació que hi ha entre l'àlgebra lineal i la geometria euclidiana. Com la clssificació de certs objectes algebraics permet classificar o distingir certs objectes geomètrics.

PROGRAMA

1. Introducció a la Geometria.
• R^2, punts i rectes del pla.
• Vectors fixos i vectors lliures. Direcció d'una recta. Rectes paral.leles.
• Producte escalar de vectors. Distància entre dos punts. Angle entre dues rectes. Rectes perpendiculars.
• Triangles rectangles. Raons trigonomètriques.
• Resolució de triangles.
• Propietats elementals de les circumferències.
• Translacions i girs.
• Còniques.

2. Sistemes d'equacions.
• Sistemes d'equacions lineals. Esglaonament d'un sistema d'equacions.
• Matrius. Operacions amb matrius. Matriu inversa.
• Transformacions elementals per files i per columnes d'una matriu. Matrius elementals. Esglaonament i PAQ-reducció. Rang d'una matriu. Càlcul de la inversa d'una matriu invertible.
• Teorema de Rouché-Frobenius. El mètode de Gauss.
• Determinant d'una matriu. Propietats. Desenvolupament del determinant per una fila o una columna. Adjunta d'una matriu. Fórmula de la inversa d'una matriu invertible. Fórmula de Cramer.

3. Espais vectorials i aplicacions lineals.
• Espai vectorial, definició i exemples.
• Subespai vectorial. Combinació lineal. Subespai vectorial generat per un subconjunt de vectors.
• Independència lineal. Base d'un espai vectorial. Teorema de Steinitz. Teorema de la base. Dimensió d'un espai vectorial.
• Teorema de Rouché-Frobenius revisitat.
• Intersecció i suma de subespais vectorials. Fórmula de Grassmann.
• Espai vectorial quocient.
• Aplicacions lineals. Composició d'aplicacions lineals. Nucli i imatge d'una aplicació lineal. Teorema de l'isomorfisme. Teoremes de Noether. Construcció d'aplicacions lineals. Coordenades d'un vector respecte d'una base. Isomorfisme entre un espai vectorial V i l'espai de les coordenades respecte d'una base fixada de V .
• Matriu d'una aplicació lineal respecte d'una base de sortida i una base d'arribada. Isomor-fisme entre l'espai vectorial de les aplicacions lineals entre dos espais vectorial de dimensions n i m i l'espai vectorial de les matrius $m \times n$. Matriu de la composició de dues aplicacions lineals.
• Fórmules del canvi de base.
• L'àlgebra dels endomorfismes d'un espai vectorial. L'àlgebra de les matrius quadrades. Isomorfisme entre l'àlgebra d'endomorfismes d'un espai vectorial de dimensió n i l'` algebra de les matrius quadrades $n \times n$.
• Classificació d'endomorfismes.
• Diagonalització. Valors propis i vectors propis. Polinomi característic. Caracterització dels endomorfismes diagonalitzables.
• Polinomi anul.lador. Teorema de Cayley-Hamilton.
• Subespais invariants per un endomorfisme. Primer teorema de descomposició.
• Forma canònica de Jordan.
• L'espai dual. Base dual. Aplicació dual d'una aplicació lineal

4. Espais vectorials amb producte escalar.
• Producte escalar est` andard de R^n .
• Els grups ortogonals $O(2)$ i $O(3)$.
• Producte escalar en un espai vectorial real. Matriu d'un producte escalar. Canvis de base. Base ortonormal, mètode de Gram-Schmidt. Aplicacions ortogonals. Grup ortogonal.
• Formes bilineals. Matriu d'una forma bilineal. Canvis de base.
• Les còniques revisitades.

BIBLIOGRAFIA

A. Bibliografia bàsica

- M. Castellet i I. Llerena. Àlgebra Lineal i Geometria Manuals de la UAB , Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1988, (versió castellana per Ed. Reverté, Barcelona, 1991).
- F. Puerta. Àlgebra Lineal UPC, Barcelona, 1986.

B. Llibres de problemes

- F. Cedó i V. Gisin. Àlgebra Bàsica Manuals de la UAB , Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1997
- J. García Lapresta, M. Panero, J. Martínez, J. Rincón y C. Palmero Test de Álgebra lineal Ed. AC, Madrid 1992
- J. Rojo y I. Martín Ejercicios y Problemas de Álgebra Lineal Mc. Graw-Hill, Madrid, 1994

PROFESSORS

GRUP 1: Agustí Reventós (teoria), despatx C1/304, hores de consulta a convenir.
Miquel Brustenga (problemes), despatx C1/-162, hores de consulta a convenir.

GRUP 2: Ferran Cedó (teoria), despatx C1/220, hores de consulta a convenir.
Gemma Bastardas (problemes), despatx C1/-132, hores de consulta a convenir.

AVALUACIÓ

Cada setmana, durant tot el curs, els alumnes entregaran dos problemes resolts. Cada alumne s'entrevistarà quatre vegades al llarg del curs amb un professor sobre els problemes que ha anat entregant i el professor el qualificarà. Aquesta nota val el 15% de la nota de la convocatòoria de juny. *Si un alumne no entrega problemes i no va a cap entrevista, llavors la seva nota d'entrevistes serà 0*.

Per aprovar la convocatòria de juny hi ha dues possibilitats:

Per parcials:
- Al 21 o 22 de novembre es farà un examen de la primera part del curs. Diguem p_1 a la nota d'aquest examen (sobre 10).
- A finals de gener o principis de febrer es farà un altre examen parcial (sobre tota la matèria del primer semestre). Diguem p_2 a la nota d'aquest parcial (sobre 10).
- Al mes de juny es farà un altre examen parcial (sobre la matèria del segon semestre) només per a aquells alumnes que tinguin la nota $p_2 \geq 3$. Diguem $p3$ a la nota d'aquest examen parcial.

Si un alumne té les notes $p_2 \geq 3$ i $p3 \geq 4$, llavors la seva nota per parcials és: $N_1 = 0.1 \cdot p1 + 0.25 \cdot p_2 + 0.5 \cdot p_3 + 0.15 \cdot e$, on e és la nota de les entrevistes (sobre 10).

Si $N_1 \geq 5$, llavors l'alumne pot triar entre dues opcions:
(a) Que N_1 sigui la seva nota a la convocatòria de juny.
(b) Presentar-se a l'examen final per millorar aquesta nota. En aquest cas, l'alumne obtindrà com a mínim la nota N_1 a la convocatòria de juny.

Per final:
A finals de juny o principis de juliol es farà un examen final de tota l'assignatura.
Diguem f a la nota d'aquest examen.
La nota de la convocatòria de juny és:

$$N = 0.15 \cdot e + 0.85 \cdot f$$

excepte en el cas en què $N_1 > N$, ja que en aquest cas N_1 és la nota de la convocatòria de juny. Si un alumne té la nota $N_1 < 5$ i no es presenta a l'examen final tindrà un "no presentat" a la convocatoria de juny.

Convocatòria de setembre:
Hi haurà un examen global de tota l'assignatura. La nota d'aquest examen serà l'única que s'utilitzarà, al 100 %, per qualificar la segona convocatòria.