

GUIA DOCENT D'INTRODUCCIÓ A L'ÀLGEBRA LINEAL

1. IDENTIFICACIÓ DE L'ASSIGNATURA

Nom: Introducció a l'Àlgebra Lineal

Codi: 27990

Crèdits: 15

Tipus: Obligatòria

2. OBJECTIUS

Els objectius d'aquesta assignatura són de dos tipus: assolir formació matemàtica i assolir coneixements i destreses propis de l'Àlgebra Lineal.

Entre els objectius de caire formatiu o d'"ofici" destaquem els següents: entendre i utilitzar correctament el llenguatge matemàtic, veure la necessitat de les demostracions i desenvolupar el sentit crític davant les afirmacions matemàtiques i, finalment, desenvolupar actituds combatives davant els problemes.

Els objectius propis del contingut els anirem detallant en la tercera part d'aquesta guia.

3. CONTINGUTS

L'assignatura està organitzada en quatre parts :

1. Sistemes d'equacions lineals i matrius.
2. Espais vectorials i aplicacions lineals.
3. Espais vectorials amb producte escalar.
4. Introducció a la geometria del pla

El curs comença revisant la resolució de sistemes d'equacions lineals que l'alumne ja coneix de l'ensenyament secundari. Sistematitzarem el mètode de resolució, entenent què s'està fent a cada pas, i intridüem el càlcul matricial com el llenguatge adequat per estudiar els sistemes d'equacions lineals. Els objectius d'aquesta primera part són aprendre a resoldre sistemes d'equacions lineals, utilitzar les eines del càlcul matricial i, tal com dèiem en la part anterior, que l'alumne es familiaritzi amb les demostracions i el llenguatge.

La segona part del curs és la més important. És fa un salt d'abstracció en considerar l'estructura algebraica d'espai vectorial i les aplicacions entre ells (aplicacions lineals). Els conceptes de base i coordenades d'un vector permetran utilitzar les eines matricials dels capítols anteriors. Els objectius d'aquesta part són:

- i) Entendre els espais vectorials com estructura algebraica i geomètrica.
- ii) Entendre els conceptes de base i dimensió.
- iii) Aprendre a calcular amb coordenades, entenent bé la relació entre un vector i les seves coordenades i entre una aplicació lineal i les seves matrius associades.
- iv) Entendre què vol dir classificar un endomorfisme d'un espai vectorial.

En la tercera part del curs es tracta de veure la relació que hi ha entre l'àlgebra lineal i la geometria euclidiana i com la classificació de certs objectes algebraics permet distingir certs objectes geomètrics.

En la darrera part del curs es revisen conceptes de geometria del pla estudiats a secundària utilitzant la metodologia i les eines dels capítols anteriors. Es pretén que conceptes familiars com el d'angle

i temes tòpics com la resolució de triangles, es visitin amb la formació i l'esperit crítics adquirits al llarg d'aquests mesos de primer curs de matemàtiques.

Programa

1- Sistemes d'equacions lineals i matrius

- Sistemes d'equacions lineals. Esglaonament d'un sistema d'equacions lineals.
- Matrius. Operacions amb matrius. Matriu inversa.
- Transformacions elementals per files i per columnes d'una matriu. Matrius elementals. Esglaonament i PAQ reducció. Rang d'una matriu. Càlcul de la inversa d'una matriu invertible.
- Teorema de Rouché-Frobenius. El mètode de Gauss.
- Determinant d'una matriu. Propietats. Fórmula de la inversa d'una matriu invertible. Fórmula de Cramer.

2- Espais vectorials i aplicacions lineals

- Espai vectorial, definició i exemples. Subespai vectorial. Combinació lineal. Subespai vectorial generat per un conjunt de vectors.
- Independència lineal. Base d'un espai vectorial. Teorema de Steinitz. Teorema de la base. Dimensió d'un espai vectorial.
- Intersecció i suma de subespais vectorials. Fórmula de Grassmann.
- Espai vectorial quocient.
- Aplicacions lineals. Composició d'aplicacions lineals. Nucli i imatge d'una aplicació lineal. Teorema de l'isomorfisme. Construcció d'aplicacions lineals.
- Coordenades d'un vector respecte d'una base. Isomorfisme entre un espai vectorial i l'espai de coordenades respecte d'una base fixada.
- Matriu d'una aplicació lineal respecte d'una base de sortida i una base d'arribada. Isomorfisme entre l'espai vectorial de les aplicacions lineals entre dos espais vectorial de dimensions n i m i l'espai vectorial de les matrius $m \times n$. Matriu de la composició de dues aplicacions lineals.
- Fórmules del canvi de base.
- L'espai dual. Base dual. Aplicació dual d'una aplicació lineal
- Classificació d'endomorfismes.
- L'àlgebra dels endomorfismes d'un espai vectorial. L'àlgebra de les matrius quadrades. Isomorfisme entre l'àlgebra d'endomorfismes d'un espai vectorial de dimensió n i l'àlgebra de les matrius quadrades $n \times n$.
- Diagonalització. Valors propis i vectors propis. Polinomi característic. Caracterització dels endomorfismes diagonalitzables.
- Polinomi mínim. Teorema de Cayley-Hamilton.
- Subespais invariants per un endomorfisme. Primer teorema de descomposició.
- Forma canònica de Jordan.

3- Espais vectorials amb producte escalar.

- Producte escalar estàndard de $\mathbb{R}^n$.
- Formes bilineals. Matriu d'una forma bilineal. Canvis de base.
- Producte escalar en un espai vectorial real. Matriu d'un producte escalar. Canvis de base. Base ortonormal, mètode de Gram-Schmidt. Aplicacions ortogonals. Grup ortogonal.

- Els grups ortogonals $O(2)$ i $O(3)$.

4- Introducció a la geometria del pla.

- $\mathbb{R}^2$, punts i rectes del pla. direcció d'una recta. rectes paral·leles.
- Producte escalar de vectors. Distància entre dos punts. Angle entre dues rectes. Rectes perpendiculars.
- Triangles rectangles. Raons trigonomètriques.
- Resolució de triangles.
- Propietats elementals de les circumferències.
- Moviments del pla.
- Còniques.

4. TEMPS DE DEDICACIÓ DE L'ALUMNE.

TIPUS D'ACTIVITAT	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de Teoria	82
	Classes de Problemes	54
	Classes de Pràctiques	0
	Activitats Tutoritzades	36
	Realització de proves parcials	8
	Realització d'exàmens finals	8
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de teoria	60
	Realització de problemes	90
	Preparació de pràctiques	0
	Preparació de treballs	0
	Preparació d'exàmens	24

Cal tenir en compte que, tal i com s'explicarà a l'apartat de mètode, hi ha 30 hores d'activitats presencials tutoritzades en que l'alumne es troba suposadament en un aula fent exercicis de l'assignatura. Així doncs aquestes hores corresponen també a hores d'estudi d'exercicis.

5. CAPACITATS O DESTRESES A ADQUIRIR

Teòriques

- Entendre els conceptes de sistema d'equacions lineals , matriu, matriu invertible, rang d'una matriu i determinant.
- Entendre els conceptes d'espai vectorial des d'un punt de vista geomètric i des d'un punt de vista algebraic. Entendre el concepte de base i dimensió, el teorema de la base i els seus corol·laris.
- Entendre el concepte d'espai vectorial quocient.
- Entendre els conceptes d'aplicació lineal i de nucli i imatge d'una aplicació lineal. Entendre el concepte d'isomorfisme i el teorema de l'isomorfisme entre espais vectorials.
- Entendre el concepte de coordenades d'un vector en una base i el de matriu d'una aplicació lineal en unes bases de sortida i d'arribada.
- Entendre el concepte d'espai dual.

- Entendre el concepte d'endomorfisme diagonalitzable i el teorema de diagonalització.
- Entendre els conceptes de forma canònica de Jordan i de base de Jordan d'un endomorfisme.
- Entendre el concepte de forma bilineal i la seva matriu respecte d'una base.
- Entendre els conceptes de producte escalar i espai vectorial euclidià. Entendre el concepte de base ortonormal d'un espai vectorial euclidià i de subespai ortogonal.
- Entendre el concepte d'aplicació que conserva el producte escalar i les seves propietats.
- Entendre les nocions de recta i circumferència i les seves posicions relatives. Entendre la noció de distància.
- Entendre la noció d'angle i la seva mesura. Entendre la noció de triangle i els criteris de congruència de triangles.
- Entendre el concepte de moviment del pla i la seva classificació.
- Entendre el concepte de cónica i la seva classificació mètrica.

Pràctiques

- Saber resoldre sistemes d'equacions lineals pel mètode de Gauss. Tenir destresa en les operacions matricials i amb el càlcul de determinants.
- Saber decidir si un subconjunt d'un espai vectorial és subespai vectorial.
- Saber decidir si un conjunt de vectors són o no linealment independents.
- Saber extreure una base d'un conjunt de generadors d'un espai vectorial.
- Saber ampliar una família de vectors linealment independents a una base d'un espai vectorial.
- Saber calcular una base de la suma i de la intersecció de subespais vectorials partint de bases d'aquests.
- Saber calcular una base del nucli i de la imatge d'una aplicació lineal.
- Saber calcular la matriu d'una aplicació lineal respecte de bases donades.
- Saber calcular les coordenades d'un vector respecte d'una base donada.
- Saber usar les fórmules del canvi de base per resoldre diversos problemes d'àlgebra lineal.
- Saber calcular el polinomi característic d'un endomorfisme.
- Saber trobar els valors propis i vectors propis d'un endomorfisme.
- Saber decidir si un endomorfisme diagonalitza o no. En cas afirmatiu, saber trobar la forma diagonal i una base de vectors propis.
- Saber calcular el polinomi mínim d'un endomorfisme.
- Saber calcular, en cas que existeixi, la forma canònica de Jordan i una base de Jordan d'un endomorfisme.
- Saber calcular una base ortonormal d'un subespai vectorial d'un espai vectorial euclidià.
- Saber decidir si una matriu representa un producte escalar o no.
- Saber resoldre problemes de trigonometria, usant els teoremes del sinus, del cosinus i de Pitàgores.
- Saber classificar els moviments del pla i distingir-los d'altres aplicacions del pla en ell mateix.
- Donada l'equació d'una cónica, saber classificar-la, i trobar eixos, centre, focus i directrius.

6. REQUISITS.

Encara que el curs serà força autocontingut es requerirà que l'alumne conegui la resolució de sistemes d'equacions lineals i l'aritmètica bàsica de números i de polinomis, i que tingui detresa de càlcul amb expressions algebraiques simbòliques. El requisit més important, però, és una gran curiositat per entendre profundament els temes que s'estudiaran.

7. METODOLOGIA.

Aquesta assignatura té tres hores setmanals de teoria i dues hores de problemes, però, com en totes les assignatures de matemàtiques, per arribar-ne a assolir un bon coneixement el més important és el treball i l'esforç personal de l'alumne, i amb aquesta idea s'ha dissenyat la metodologia de les assignatures de primer curs.

Els alumnes disposaran de llibre de text i se'ls aconsella que es mirin els temes abans de la classe de teoria. El coneixement de les nocions introduïdes, els enuncis dels teoremes i les seves aplicacions són imprescindibles a l'hora de posar-se a atacar els problemes. Però també és bàsica la comprensió de les demostracions dels teoremes i proposicions per tal de resoldre els problemes amb tècniques semblants. Durant l'explicació del professor o amb hores de consulta els alumnes haurien de preguntar tots els dubtes que tinguin.

Setmanalment hi haurà una sessió de dues hores de problemes. Aquestes sessions són de pràctiques, especialment el primer quadrimestre. A l'aula, els alumnes treballaran en grups les llistes de problemes, preguntant al professor tantes vegades com els sigui necessari, després el professor explicarà la resolució dels problemes més representatius de la llista. En aquest moment és bàsica la participació dels estudiants per contrastar la seva resolució amb la del professor, corregir-la o aportar diferents maneres d'abordar els problemes. És importantíssim que l'alumne s'hagi barallat a fons amb els problemes, i per tant, que preparin els exercicis abans d'anar a classe.

Cada quinze dies, es proposarà un exercici per lliurar. Periòdicament sobre els exercicis lliurats es faran entrevistes personals amb l'alumne per tal d'orientar-lo en la resolució i en la manera d'exposar-la. És per això que és convenient que l'alumne es quedi una còpia dels exercicis lliurats per poder preparar l'entrevista.

Per treballar aquests exercicis o altres relacionats amb l'assignatura, els dimecres, durant tres hores, l'alumne podrà treballar en una aula amb l'ajuda d'un professor que atindrà les seves consultes. Cal tenir en compte que aquestes sessions són comunes per a totes les assignatures de primer curs.

A més, l'assignatura disposa d'una pàgina al "campus virtual" on s'hi aniran penjant les llistes d'exercicis, material extra i qualsevol informació referent a l'assignatura.

A banda de tot això els alumnes disposaran d'unes hores de tutoria al despatx del professor de teoria i de problemes, on podran consultar dubtes i demanar tota mena d'ajuda en el seu treball.

8. Avaluació

Primera Convocatòria (Juny)

- Un 25% de la nota correspon a l'avaluació continuada. Aquesta nota s'obté de:
 - l'entrega i correcció dels problemes,
 - les entrevistes en què es discutiran els problemes anteriorment entregats i,
 - 4 proves d'una durada d'uns 60 minuts.

D'aquí s'obtindrà una nota sobre 10 que anomenarem s

- L'altre 75% es farà amb notes d'examens. Aquesta nota es pot obtenir de 2 maneres

– **Per parcials**

A finals de gener o principis de febrer es farà un examen parcial (sobre tota la matèria del primer semestre). Diguem P_1 a la nota d'aquest parcial (sobre 10).

Al mes de juny es farà un altre examen parcial (sobre la matèria del segon semestre) només per a aquells alumnes que tinguin la nota $p_1 \geq 3$. Diguem p_2 a la nota d'aquest examen parcial.

Si un alumne té les notes $p_1 \geq 3$ i $p_2 \geq 4$, llavors la seva nota per parcials és

$$N_1 = 0.25 \cdot s + 0.35 \cdot p_1 + 0.4 \cdot p_2.$$

Si $N_1 \geq 5$, llavors l'alumne pot triar entre dues opcions:

(a) Que N_1 sigui la seva nota a la convocatòria de juny.

(b) Presentar-se a l'examen final per millorar aquesta nota. En aquest cas l'alumne obtindrà com a mínim la nota N_1 a la convocatòria de juny.

– **Per final:**

A finals de juny o principis de juliol es farà un examen final de tota l'assignatura. Diguem f a la nota d'aquest examen.

La nota de la convocatòria de juny és:

$$N = 0.25 \cdot s + 0.75 \cdot f,$$

excepte en el cas que $N_1 > N$, ja que en aquest cas N_1 és la nota de la convocatòria de juny.

Nota: Si un alumne té la nota $N_1 < 5$ i no es presenta a l'examen final tindrà un “no presentat” a la convocatòria de juny.

Segona Convocatòria (Setembre)

Hi haurà un examen global de tota l'assignatura. La nota d'aquest examen serà l'única que s'utilitzarà, al 100 %, per qualificar la segona convocatòria.

9. Bibliografia

Llibre de text

F. CEDÓ I A. REVENTÓS Geometria Plana i Àlgebra Lineal *Manuels de la UAB*, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 2004

Altra bibliografia

M. CASTELLET I I. LLERENA Àlgebra Lineal i Geometria *Manuels de la UAB*, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1988, (versió castellana per Ed. Reverté, Barcelona, 1991).

F. PUERTA Àlgebra Lineal *UPC, Barcelona, 1986*.

Llibres de problemes

F. CEDÓ I V. GISIN Àlgebra Bàsica *Manuels de la UAB*, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1997

J. GARCÍA LAPRESTA, M. PANERO, J. MARTÍNEZ, J. RINCÓN Y C. PALMERO Test de Àlgebra lineal *Ed. AC, Madrid 1992*

J. ROJO Y I. MARTÍN Ejercicios y Problemas de Àlgebra Lineal *Mc. Graw-Hill, Madrid, 1994*

10. Professorat

Judit Abardia
Problemes
C1/212, 935811886

Ferran Cedó
Problemes (segon quadrimestre)
C1/352, 935814156
cedo@mat.uab.es

Gemma Bastardas
Problemes (primer quadrimestre)
C1/-132, 935812534
gemmab@mat.uab.es

Jaume Moncasi
teoria
C1/210, 935812941
moncasi@mat.uab.es