1. **Identidicació de l'assignatura:**

   Nom de l'assignatura: **Anàlisi Real i Funcional**

   Codi: **28009**

   Nombre de crèdits: **9**

   Tipus: **Troncal, segon cicle.**

2. **Objectius de l'assignatura:**

   Conèixer i saber utilitzar els conceptes fonamentals de la integral de Lebesgue a $\mathbb{R}^n$.

   Presentar els mètodes abstractes de l'anàlisi funcional al nivell de la teoría dels espais de Hilbert i dels espais de Banach.

   Entendre amb profunditat les demostracions del resultats més importants.

3. **Continguts:**

   (a) La integral de Lebesgue

   En aquest capítol presentarem un desenvolupament sistemàtic de la integral de funcions numèriques introduda per Lebesgue a partir del concepte de mesura de conjunts a $\mathbb{R}^n$.

   Continguts del capítol:

   - *Mesura de conjunts.*
     - $\sigma-$àlgebra i mesura. Espais de Mesura. Mesures $\sigma-$ finites.
     - Mesura exterior de Lebesgue. Conjunts de mesura zero. La mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}^n$.
   - *Funcions mesurables.*
     - Funciones mesurables. Propietats i exemples.
   - *La integral de Lebesgue.*
     - Funcions simples i la seva integral. Integraci de funcions mesurables positives.
     - El teorema de la convergència monótona. El lema de Fatou.
     - Funcions integrables Lebesgue. El teorema de la convergència dominada. L'espai $\mathcal{L}(E)$.
   - *Els espais $L^p(E)$.*
   - *Càlcul integral en una variable*
     - Càlcul integral en una variable. Teorema de derivació sota el signe de integral. Relació integral de Riemann / integral de Lebesgue.
   - *El teorema de Fubini–Tonelli. El teorema del canvi de variables.*

(b) Espais de Banach

Aquest capítol conté fets fonamentals referents a espais de Banach generals i als operadors lineals acotats entre aquests espais, amb els exemples bàsics dels espais L^p i $C(K)$ de les funcions continues sobre un compacte.

Continguts del capítol:

- *Definicions bàsiques. Subespais. Productes i quocients.*
- *Els exemples fonamentals*
  - Els espais $L^p(R)$.
  - Espais de funcions continues. Teorema de Stone–Weiestrass. Teorema d'Ascoli.
- *Operadors lineals acotats*
  - L'operador de Fredholm. L'operador de Volterra. L'operador de Hilbert–Schmitd.
- *Espais de dimensió finita. Teorema de Riesz*
- *L'espai normat dels operadors lineals acotats. Sèries de Neumann*

(c) Espais de Hilbert

Aquest capítol està destinat als espais de Hilbert, la classe dels espais de Banach amb una norma que prové d'un producte escalar, com succeeix amb els espais euclidians i els espais L^2 de funcions de quadrat integrable. A partir del resultat fonamental que és el teorema de la projecció, estudiarem la dualitat i els desenvolupaments en sèries de Fourier respecte de bases ortonormals.

Continguts del capítol:

- *Definicions i propietats bàsiques.*
- *El Teorema de la Projecció.*
- *Dualitat. Teorema de Riesz. L'operador adjunt.*
- *Bases Ortonormals i sèries de Fourier. Desigualtat de Bessel. Teorema de Fisher–Riesz.*

(d) Operadors Compactes

Aquest capítol se centra en la teoria espectral dels operadors d'espais de Banach i d'operadors compactes autoadjunts d'espais de Hilbert, que permet estendre a dimensió infinita la teoria espectral d'espais euclidians i la diagonalització d'endomorfismes simètrics.

Continguts del capítol:

- *Definicions i propietats bàsiques.*
- *Valors propis i espectre.*
- *Operadors compactes en espais de Hilbert*
  - La alternativa de Fredholm
  - Operadors compactes autoadjunts. Teorema espectral. Teorema de representació espectral.

4. **Temps que ha de dedicar l'alumne per tal de superar l'assignatura**

Tipus d'activitat	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de Teoria	42
	Classes de Problemes	28
	Classes de pràctiques	–
	Activitats tutoritzades	–
	Proves parcials	–
	Proves finals	4
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de teoria	45
	Realització de Problemes	86
	Recerca bibliogràfica	–
	Preparació de pràctiques	–
	Preparació de treballs	–
	Preparació d'exàmens	20
	TOTAL	225

5. **Capacitats o destreses a adquirir**

- La integral de Lebesgue:

  Entendre les limitacions de la integral de Riemann i la necessitat de construir una nova integral.

  Dominar el concepte de mesura i la construcció de la integral.

  El paper dels conjunts de mesura zero.

  Aplicació dels teoremes de convergència.

  El teorema de Fubini–Tonelli i el teorema del canvi de variables. (Entendre el mètodo que farem servir per provar els dos resultats que és molt habitual en teoria de la integració.)

- Espais de Banach:

  Entendre i dominar amb detall els objectes bàsics de la teoria general, els espais de Banach i els operadors definits entre ells.

  Propietats fonamentals dels espais L^p i dels espais de les funcions contínues sobre un compacte.

  El contrast amb els espais de dimensió finita.

- Espais de Hilbert:

  El teorema de la projecció.

  Concepte de dual i d'operador adjunt.

  Bases de Hilbert i Teorema de Fischer-Riesz.

- Operadors compactes:
  Entendre bé les propietats bàsiques del operadors compactes.
  El teorema de representció espectral. Aplicacions a les equacions integrals.

6. **Requisits previs**

   Els coneixements matemàtics necessaris per seguir aquesta assignatura són els corresponents a les assignatures d'anàlisi dels cursos anteriors i d'àlgebra lineal.

7. **Metodología**

   Aquesta assignatura té tres hores a la setmana de teoria i dues de problemes.

   Es pretén que l'alumne entengui les demostracions dels resultats que es presenten a classe. La comprensió dels resultats teòrics i de les tècniques emprades a les demostracions donen la base per a poder resoldre els problemes.

   Periódicament, l'estudiant rebrà unes llistes de problemes sobre els quals es treballarà a les classes de problemes.

   A banda, les alumnes disposaran d'unes hores de consulta al despatx dels professors de teoria i de problemes (els dijous de 15 a 16), on podran consultar dubtes, demanar pistes per la resolució de problemes, etc.

8. **Avaluació**

   Examen final (problemes 80% de la nota i teoria 20% de la nota.)

9. **Bibliografia**

   (a) J. Bruna, *Anàlisi Real,* UAB servei de publicacions. Col.lecció materials 26.
   Text bàsic de consulta.

   (b) J. Cerdà, *Càlcul Integral, Edicions UB 49 Manuals.*
   En els tres primers capítols es presenta de forma sistemàtiva la construcció de la integral de Lebesgue.

   (c) B.V. Limaye, *Functional Analysis,* Wiley, 1.981.
   Capítols recomanats: VI "Geometry of Hilbert Spaces" i VII "Bounded operators on Hilbert Spaces".

   (d) W. Rudin, *Análisis Real y Complejo,* Ed. Alhambra, 1.985.
   Capítols recomanats: 3 "Espacios L^p" i 4 "Teoría elemental de los espacios de Hilbert".

10. **Professorat**

Activitat	**Nom**	**e-mail**	**Despaxt**
Teoria	Joaquim Martín	jmartin@mat.uab.es	C1/220
Problemes	Joaquim Martín	jmartin@mat.uab.es	C1/220