Geometria Riemanniana

Curs 2004-2005

Objectius

Una varietat de Riemann (G. F. B. Riemann) és una varietat diferenciable n dimensional en la qual s'ha donat un tensor g de rang 2 covariant, simètric i definit positiu. El tensor g s'anomena tensor mètric. La geometria riemanniana és una generalització de la geometria intrínseca de les superfícies a l'espai euclidià. La mètrica d'una varietat de Riemann coincideix amb la mètrica euclidiana fins el primer ordre d'aproximació. La diferència entre les mètriques ve donada per la curvatura de Riemann que és la generalització multidimensional de la curvatura de Gauss d'una superfície.
En els fonaments de la geometria riemanniana es troben tres idees: l'existència de mètriques no euclidianes, la curvatura de Gauss i el concepte de varietat de dimensió n.
La geometria riemanniana juga un paper important en la formulació de la teoria general de la relativitat i te aplicació directa en la Mecànica.
Durant el curs es tractaran conceptes fonamentals com connexions, curvatura i geodèsiques. Es treballaran tots aquest conceptes en general però sobretot en superfícies, tan abstractes com immerses en $\mathbb{R}^3$. Es tractaran les varietats amb curvatura seccional constant i acabarem amb el teorema de Gauss-Bonnet i les seves conseqüències, com exemple de resultat en geometria riemanniana global.

Programa

1. Introducció

1.1 Varietats diferenciables. Exemples.

1.2 Varietats de Riemann.

2. Connexions

2.1 Connexions i derivació covariant.

2.2 Connexions en varietats de Riemann. Expressió local i transport paral.lel. Referència mòbil.

3. Geodèsiques

3.1 Geodèsiques. Primera fórmula de variació. Aplicació exponencial.

3.2 Aplicació exponencial. Lema de Gauss. Entorns normals.

3.3 Teorema de Hopf-Rinow.

4. Curvatura

4.1 Tensor de curvatura. Curvatura seccional.

4.2 Teorema de Frobenius. Varietats planes.

4.3 Camps de Jacobi.

4.4 Teorema de Hadamard.

5. Espais de curvatura constant

5.1 Teorema de Cartan sobre determinació de la mètrica.

5.2 Els models esfèric, euclidià i hiperbòlic.

6. Teorema de Gauss-Bonet i aplicacions

Bibliografia

1. Manfredo P. do Carmo, *Geometria diferencial de curvas y superficies.* Alianza Universidad, 1990.
2. Manfredo P. do Carmo, *Riemannian geometry.* Birkhäuser, 1992.
3. S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, *Riemannian goemetry.* Springer-Verlag, 1990.
4. J. Cheeger and D.Ebin, *Comparison theorems in Riemannian goemetry.* North-Holland Pub. 1975.
5. Joan Girbau, *Geometria diferencial i Relativitat.* Publicacions de la UAB, 1993.
6. M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Publish or Perish Inc, 1979.