Filosofia de les ciències formals

(Una introducció a la lògica matemàtica)

Professor/a:	**Àngel García-Cerdaña** Angel.Garcia.Cerdana@uab.es	*Curs acadèmic:*	**2005-2006**
Cicle:	**Segon**	*Curs:*	
Quadrimestre:	**Segon**	*Grup:*	**1**
Crèdits:	**6**	*Tipus:*	**OP**
Àrea:	**Lògica i Filosofia de la Ciència**	*Horari:*	**Divendres de 8:30 a 11:30**
Tutoria:	**Divendres de 11:30 a 12:30 hores**		

REQUISITS

Aquesta assignatura és una introducció a la Lògica Matemàtica. És un curs auto-contingut però és recomanable tenir alguna formació prèvia en lògica elemental o tenir certa familiaritat amb la metodologia matemàtica elemental a nivell d'ensenyament secundari. Pot ser cursada per alumnes de la llicenciatura de Matemàtiques, o d'Informàtica, o d'altres especialitats científiques o tecnològiques sense requisits previs. Per els alumnes de la Llicenciatura de Filosofia que vulguin cursar aquesta assignatura és recomanable, encara que no imprescindible, haver cursat l'assignatura d'Ampliació de Lògica de segon cicle. Per alumnes d'altres departaments de la Facultat de Filosofia i Lletres es recomana tenir aprovada l'assignatura de Lògica de primer curs de la Llicenciatura de Filosofia. En cas de dubtes es pot concertar una entrevista amb el professor per tal de considerar conjuntament la possibilitat de cursar aquesta assignatura.

CONTINGUT

L'assignatura consta de dues parts: la primera part es dedica a la presentació de la lògica de primer ordre i inclou com a resultat principal el teorema de completesa d'aquesta lògica (Teorema de Gödel-Henkin). La segona part es dedica a la demostració dels teoremes clàssics d'incompletesa (Teorema de Gödel) i d'indecidibilitat (Teorema de Church) de la lògica de primer ordre, així com a la presentació de les extensions d'aquests resultats a la Teoria de Conjunts. Finalment, es dona una visió panoràmica del tema de computabilitat i les màquines de Turing.

Antecedents històrics. La formulació de la teoria de conjunts en un llenguatge de primer ordre per part de Fraenkel l'any 1922 -completant l'axiomatització de Zermelo de l'any 1908- va mostrar que la lògica de primer ordre és suficient per a formular la Matemàtica. El problema de la completesa de la lògica de primer ordre va ser plantejat per Hilbert (1928) i resolt per Gödel (1930) per a llenguatges numerables i per Henkin (1949) per a llenguatges arbitraris. L'any 1931 Gödel demostra el seu famós teorema i estableix la incompletesa de l'aritmètica de

Peano de primer ordre. L'any 1936 Church estableix la indecidibilitat d'aquesta lògica. Tarski, Mostowski i Robinson (1953) mostren que la teoria de conjunts és també incompleta i indecidible.

OBJECTIUS

- Introduir els llenguatges de primer ordre i demostrar els teoremes de correcció i completesa de la lògica de primer ordre.
- Presentar les dues teories de primer ordre que constitueixen el fonament de totes les matemàtiques: la aritmètica de Peano i la teoria de conjunts.
- Introduir les eines necessàries per a la demostració del primer teorema de Gödel com ara la noció de funció recursiva i el procés d'aritmetització d'una teoria de primer ordre (gödelització).
- Demostrar el primer teorema de Gödel, és a dir, que l'Aritmètica de Peano de Primer Ordre és incompleta.
- Demostrar la Indecidibilitat de la Lògica de Primer Ordre i de l'Aritmètica de Peano.
- Presentar els resultats de Tarski, Mostowski i Robinson mostrant que les teories on l'Aritmètica de Peano és relativament interpretable, com per exemple la teoria de conjunts, són incompletes.
- Donar una visió panoràmica del concepte de màquina de Turing i dels problemes de computabilitat .

TEMARI

Part I. Lògica de primer ordre

1. Llenguatges de primer ordre.
2. Estructures i interpretacions. Satisfactibilitat, veritat en una estructura. Relació de conseqüència semàntica.
3. Un càlcul deductiu. La relació de conseqüència sintàctica. Metateoremes i regles derivades.
4. Teoremes de correcció i completesa. Teorema de compacitat.
5. Dues teories de primer ordre: la teoria de conjunts i l'aritmètica de Peano de primer ordre.

Part II. Incompletesa i indecidibilitat

1. Funcions primitives recursives i generals recursives.
2. Representabilitat i expressabilitat de funcions i relacions numèriques.
3. La funció □ de Gödel. Aritmetització. Nombres de Gödel.
4. Relacions recursives associades a una teoria formal. Teorema del punt fix.
5. Teorema d'incompletesa de Gödel-Rosser i les seves extensions.
6. El sistema de Robinson. Indecidibilitat de les teories de Peano i Robinson.
7. Teorema de Church.
8. Extensió dels resultats d'incompletesa i indecidibilitat a la teoria de conjunts.
9. Computabilitat i màquines de Turing: una visió panoràmica.

AVALUACIÓ

S'avaluarà a partir de:

e) assistència i participació a les classes.
f) lliurament d'exercicis de les Parts I i II proposats a classe.
g) lliurament d'un treball de recerca sobre un tema de les Parts II o III.
h) examen final.

BIBLIOGRAFIA

Bàsica:

Enderton, H. B., *A Mathematical Introduction to Logic.* Harcourt/Academic Press, 2001.

Hamilton, A. G., *Logic for Mathematicians.* Academic. Press, 1972. (Traducció: *Lógica para Matemáticos.* Paraninfo,1981)

Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic,* Chapman and Hall, 1997.

Pla, J., *Lliçons de Lògica Matemàtica.* PPU, 1991.

Pla, J., *Notes per a unes classes de Teoria de Models i Indecidibilitat,* Universitat de les Illes Balears, 2002.

Tarski, A., Mostowski, A., Robinson, R., *Undecidable Theories,* North-Holland, 1953.

Complementària:

Davis, M., *La computadora universal. De Leibnitz a Turing,* Debate, 2002.

TUTORIA INTEGRADA

Resolució d'exercicis per complementar i reforçar la part teòrica del curs.
Aclariment de dubtes i repàs de temes i idees clau.