

Presentació i Objectius de l'assignatura

Aquest curs és una introducció als conceptes bàsics de geometria afí i euclidiana. Les nocions afins es consideraran per a qualsevol cos i en qualsevol dimensió. En canvi, la geometria euclidiana només té sentit en el cos dels reals. S'insistirà en les dimensions 2 i 3.

Els principals objectes de la geometria afí són les varietats lineals (rectes, plans, etc...), i les seves principals nocions són la incidència, el paral·lelisme, la raó simple i el baricentre. En geometria euclidiana afegim un producte escalar, i per tant tenim les nocions d'angle i distància, que no existeixen en geometria afí. Hi ha resultats, com el teorema de Tales, que es poden enunciar i demostrar en el context afí, sense necessitat d'utilitzar les nocions euclidianes.

La darrera part del curs parla sobre formes bilineals simètriques. En particular es tracta la classificació de formes bilineals reals i complexes, aplicant-ho posteriorment a la classificació de quàdriques.

Coneixements matemàtics previs

Es requereix tenir ben assimilat el contingut de l'assignatura *Introducció a l'Àlgebra Lineal*.

Programa

1. Geometria afí

Espai afí sobre un cos K , definició i exemples. Subespai afí: varietats lineals. Fórmules de Grassmann. Baricentre. Referència afí. Raó simple. Teoremes de Tales, Menelao i Ceva. Afinitats. Teorema fonamental de la geometria afí. Classificació de les afinitats del pla.

2. [Espais vectorials] Espais vectorials amb producte escalar

Formes bilineals. Matriu associada i canvi de base. Producte escalar. Subespais vectorials ortogonals. Isometries. Grup ortogonal.

3. [Espais afins] Geometria Euclidiana

Geometria sobre un espai afí tal que l'espai vectorial associat té definit un producte escalar.

Projecció ortogonal. Distància i angles. Moviments. Classificació dels moviments al pla i a l'espai.

4. [Espais vectorials] Formes bilineals simètriques
Endomorfisme associat a dues formes bilineals. Aplicació adjunta i autoadjunta. Diagonalització de matrius simètriques: Completació de quadrats. Diagonalització ortogonal de matrius simètriques: Teorema espectral. Classificació de formes bilineals simètriques sobre els complexos. Classificació de formes bilineals simètriques sobre els reals: Teorema de Sylvester
5. [Espais afins] Quàdriques
Classificació afí i mètrica de còniques i quàdriques.

Bibliografia

Bàsica

M. Castellet i I. Llerena. *Àlgebra lineal i Geometria* UAB, 1990.

A. Reventós (problemes proposats i resolts per L. Saumell). *Geometria Lineal* Apunts pendents de publicació.

Complementària

A. Costa, J. Lafuente *Geometrías Lineales y Grupos de transformaciones* Cuadernos de la UNED 1991

S. Xambó. *Álgebra lineal y geometrías lineales* EUNIBAR, BCN 78

E. Hernández. *Álgebra y geometría*, Addison-Wesley, 1994

Professors

- Teoria: Agustí Reventós Tarrida (despatx C1/304) agusti@mat.uab.es
- Problemes i Pràctiques: Laia Saumell Ariño (despatx C1/106) laia@mat.uab.es

L'assignatura està donada d'alta al campus virtual (<https://www.interactiva.uab.es/cv/>), on els estudiants matriculats tenen accés amb el nom d'usuari i password que utilitzen per al correu electrònic de la UAB.

Temps de dedicació de l'alumne

Tipus d'activitat	Descripció	Hores
Activitats presencials	Teoria	45
	Problemes	15
	Tutories	10
	Examen parcial	2
	Examen final	4
Activitats no presencials	Estudiar teoria	30
	Fer exercicis	45
	Preparar entrevistes	4
	Preparar examen parcial	15
	Preparar examen final	30
Total		200

Capacitats o destreses a adquirir

- Saber manipular amb soltesa les relacions entre punts i vectors en un espai afí.
- Entendre bé quin paper juga el cos sobre el que està definit l'espai vectorial associat a l'espai afí. Cas dels cossos finits.
- Veure exemples d'espais afins reals on les rectes no es poden dibuixar amb els regles euclidianes estàndards.
- Entendre bé que d'entre els punts d'un espai afí no n'hi ha cap de privilegiat respecte dels altres. Referències afins.
- Entendre les varietats lineals com subespais afins.
- Saber calcular la varietat lineal generada per n punts.
- Saber calcular amb soltesa les seves equacions.
- Saber calcular amb soltesa la intersecció i suma de varietats lineals. Fórmules de Grassmann.
- Definició i propietats del baricentre de n punts. Propietats del baricentre d'un triangle.
- Raó simple.
- Teorema de Tales. Veure que és un teorema de la geometria afí (no sabem encara què és la distància entre dos punts) i que es pot enunciar en termes de raó simple.

- Teorema de Menelao. Mateix comentari que sobre el teorema de Tales.
- Teorema de Ceva. Mateix comentari que sobre el teorema de Tales.
- Estudi de les aplicacions naturals entre els espais afins, és a dir aquelles que porten punts apunts i rectes a rectes.
- Definició precisa d'afinitat. Presentació de la geometria afí com l'estudi de les propietats de les figures invariants per afinitats.
- Saber calcular amb soltesa les equacions de les afinitats.
- Teorema fonamental de la geometria afí. Paper del cos.
- Saber calcular amb soltesa els punts fixos, les rectes fixes i les rectes invariants per una afinitat.
- Estudi detallat de les afinitats de la recta i el pla.
- Afinitats equivalents. Saber reconèixer quan dues afinitats aparentment diferents, són essencialment la mateixa.
- Invariants. Classificació detallada de les afinitats de la recta i el pla. Això implica una revisió de la classificació d'endomorfismes vista prèviament en un curs d'àlgebra.
- (*Espais vectorials*) Revisió del concepte de producte escalar sobre espais vectorials reals.
- Cóm saber si una matriu simètrica és definida positiva?
- (*Espais vectorials*) Estudi de les aplicacions que conserven aquest producte escalar, anomenades isometries.
- (*Espais vectorials*) Grup ortogonal $O(n)$. Estudi detallat dels grups ortogonals en dimensió 2 i 3, és a dir, $O(2)$ i $O(3)$.
- Introducció d'una distància en un espai afí.
- Tenir molt clar que la distància depèn de quin producte escalar prenem a l'espai vectorial associat.
- Saber calcular amb soltesa la distància entre dos punts i l'angle entre dues rectes.
- Ortogonalitat. Saber calcular amb soltesa la distància entre dues varietats lineals de dimensions arbitràries.
- Estudi dels moviments, és a dir, d'aquells afinitats que conserven la noció de distància introduïda prèviament.

- Saber calcular amb soltesa els punts fixos, les rectes fixes i les rectes invariants per un moviment.
- Estudi detallat dels moviments de la recta i el pla.
- Moviments equivalents. Saber reconèixer quan dos moviments aparentment diferents, són essencialment el mateix.
- Invariants. Classificació detallada dels moviments de la recta, el pla i l'espai.
- (*Espais vectorials*) Concepte d'aplicació bilineal simètrica sobre k -espais vectorials.
- (*Espais vectorials*) S'ha de saber que sempre hi ha una base on la matriu d'una aplicació bilineal simètrica diagonalitza, i s'ha de saber calcular aquesta base tant pel mètode de la completació de quadrats com per l'adaptació a aquesta situació del mètode de la PAQ-reducció.
- (*Espais vectorials*) Aplicacions bilineals simètriques equivalents. Saber reconèixer quan dues aplicacions bilineals simètriques aparentment diferents, són essencialment la mateixa.
- (*Espais vectorials*) Classificació de les aplicacions bilineals simètriques.
- (*Espais vectorials*) Classificació sobre els reals (teorema de Sylvester) i sobre els complexos.
- (*Espais vectorials*) Utilització del teorema de Descartes sobre zeros de polinomis per poder classificar ràpidament en el cas real.
- (*Espais vectorials*) Diagonalització simultània: es tracta de trobar una base on diagonalitzin a la vegada dues aplicacions bilineals simètriques definides sobre el mateix espai vectorial (una d'elles definida positiva).
- (*Espais vectorials*) Saber calcular amb soltesa l'*endomorfisme associat* a les dues aplicacions bilineals anteriors.
- (*Espais vectorials*) Entendre en profunditat el *teorema espectral*, per tal de saber posteriorment calcular amb soltesa la base on es dona la diagonalització simultània.
- (*Polinomis quadràtics*) Podem reduir, fent canvis de variable afins, un polinomi quadràtic a una suma de quadrats?
- (*Polinomis quadràtics*) Podem reduir, fent canvis de variable euclidians, un polinomi quadràtic a una suma de quadrats?
- Quàdriques. Definició i exemples.
- Què vol dir que dues quàdriques siguin afinment equivalents? Classificació afí.

- Què vol dir que dues quàdriques siguin mètricament equivalents? Classificació mètrica.

Avaluació

Hi haurà un examen parcial el desembre i un examen final el febrer. La nota final es calcularà aplicant la ben coneguda *fórmula Bardina* a aquestes dues notes.

$$F = 0.25P\left(1 - \frac{E}{10}\right) + E$$

on F = nota final, P =nota de l'examen parcial, i E = nota de l'examen, (totes sobre 10).