

Guia Docent de l'assignatura Geometria Diferencial

Curs 2005-2006

Identificador

28004 Geometria Diferencial

Tipus: Troncal

Crèdits: 7,5 (4,5 teòrics i 3 pràctics)

1 Presentació i objectius

Els conceptes i nocions de l'assignatura de Geometria Diferencial són bàsics en la comprensió de la realitat física i les seves aplicacions tècniques en el camp de l'enginyeria, on els objectes d'estudi es poden representar geomètricament per elements no lineals de l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$, és a dir, bàsicament per corbes i superfícies.

L'objectiu principal és conèixer quines són les nocions geomètriques que permeten caracteritzar de manera teòrica la forma d'aquests elements (curvatura i torsió en el cas d'una corba, primera i segona forma fonamental en el cas d'una superfície), així com desenvolupar mètodes de càlcul de les seves característiques mètriques (longitud, àrea, etc).

També és important relacionar els invariants associats a una corba continguda en una superfície amb les nocions i magnituds pròpies d'aquesta última.

La última part del curs tracta de la geometria intrínseca d'una superfície. Conceptualment és la part més difícil del curs, ja que és el primer pas cap a les nocions abstractes de varietat diferenciable i varietat de Riemann que s'estudien en les assignatures de Geometria de Varietats i Geometria Riemanniana.

Al final de curs, l'alumne hauria de ser capaç de:

- Determinar si un subconjunt donat de $\mathbb{R}^3$ és una corba o una superfície regular.
- Trobar parametritzacions locals de corbes i superfícies de $\mathbb{R}^3$.
- Calcular la curvatura, torsió i triedre de Frenet d'una corba parametritzada.
- Calcular la primera i segona forma fonamental d'una superfície parametritzada.
- Calcular longitud, angles i àrees dins d'una superfície a partir de la primera forma fonamental.
- Calcular i interpretar geomètricament la curvatura de Gauss d'una superfície.
- Calcular i interpretar geomètricament la curvatura normal i geodèsica d'una corba continguda en una superfície.
- Determinar si dues superfícies són localment isomètriques.
- Calcular les equacions de les geodèsiques d'una superfície i interpretar-les geomètrica i físicament.

2 Continguts

1. Corbes

1.1 Corbes parametritzades i corbes regulars.

1.2 Longitud i paràmetre arc.

1.3 Corbes planes.

1.3.1 Estudi local: curvatura amb signe.

1.3.2 Aspectes globals.

1.4 Corbes a $\mathbb{R}^3$: curvatura i torsió, triedre i fórmules de Frenet.

2. Superfícies de $\mathbb{R}^3$

2.1 Definició de superfície regular i d'aplicació diferenciable entre superfícies.

2.2 Primera forma fonamental i càlcul de longituds, angles i àrees.

2.3 L'aplicació de Gauss i segona forma fonamental: diferents nocions de curvatures d'una superfície.

2.4 Camps vectorials i derivada covariant.

2.4.1 Camps vectorials i derivada covariant a $\mathbb{R}^n$.

2.4.2 Camps tangents a superfícies.

3. Geometria intrínseca de superfícies

3.1 Isometries i aplicacions conformes.

3.2 Derivada covariant intrínseca.

3.3 Teorema Egredi de Gauss.

3.4 Transport paral·lel i geodèsiques.

3.4.1 Mètodes de càlcul.

3.4.2 Interpretació geomètrica i exemples.

3 Requisits previs

Per assimilar tots els continguts de l'assignatura s'ha de tenir un coneixement previ de càlcul en diverses variables (derivació, integració, teorema de la funció implícita,...), d'equacions diferencials (teorema d'existència i unicitat de solucions) i d'àlgebra i geometria lineal (diagonalització d'endomorfismes autoadjunts, formes quadràtiques, còniques i quàdriques,...). Per tant, és convenient haver cursat les assignatures d'Anàlisi Matemàtica II i Geometria Lineal. També és aconsellable conèixer alguns dels continguts de les assignatures d'Anàlisi Vectorial i Topologia.

4 Metodologia

Per tal d'assimilar les diferents nocions geomètriques i mètodes de càlcul dels conceptes introduïts a les classes teòriques és molt important que l'alumne dediqui una bona part del temps d'estudi de l'assignatura a practicar-les reiteradament mitjançant els exemples i els exercicis proposats a classe de problemes. En aquest sentit, encoratgem a l'alumne a assistir habitualment a les classes pràctiques. S'ha de dir també que el seu aprofitament és molt més accentuat quan l'alumne ha plantejat i/o resolt els problemes prèviament a la seva correcció en classe.

La pàgina web www-history.mcs.st-andrews.ac.uk, secció “Famous curves index”, conté molts exemples de corbes clàssiques definides implícitament així com parametritzades.

Aconsellem també l'ús del manipulador algebraic Maple per fer alguns càlculs rutinaris i sobretot per obtenir representacions gràfiques que ajudin a l'alumne visualitzar tot tipus d'objectes geomètrics.

Els alumnes interessats en aprofundir en algun tema relacionat amb l'assignatura són encoratjats a contactar amb els professors de teoria i/o problemes per tal de servir-los de guia (donant algunes qüestions precises, bibliografia, etc...) en la realització d'un treball optatiu, susceptible de ser avaluat en la forma que s'especifica en el següent punt. Es proposarà una llista de temes deixant a l'alumne la possibilitat de triar un d'ells o de proposar-ne d'altres. En aquesta llista apareixeran alguns problemes relacionats amb la física i l'enginyeria.

5 Avaluació

L'avaluació es farà tenint en compte l'assimilació dels continguts teòrics i pràctics de l'assignatura així com el treball continuat al llarg del curs, sense perjudici de la metodologia particular emprada per cada alumne. La quantificació d'aquestes dades es farà de la manera següent:

A mitjans del semestre, en una data encara per determinar, es realitzarà una prova de seguiment de l'assignatura per avaluar els continguts teòrics i pràctics treballats a les classes de teoria i problemes fins a uns dies abans. La nota d'aquesta prova serà un nombre P entre 0 i 10.

Al finalitzar el semestre, es convocarà un examen final, de continguts principalment pràctics, basats en problemes del tipus que s'hagin tractat a les classes. La nota d'aquest examen serà un nombre F entre 0 i 10.

Al començament del curs, proposarem una sèrie de temes per a que, de manera optativa, individualment o en grups de 2 o 3 persones, puguin ser estudiats i desenvolupats pels alumnes fora de l'horari de classe. La redacció d'aquest treball (en la que s'haurà d'indicar clarament quins són els autors reals) no es podrà entregar després del dia 26 de maig. Durant la setmana del 29 de maig al 2 de juny cada grup farà una breu presentació (de 5 a 15 minuts) a la classe del seu treball. Aquest s'avaluarà amb una nota T entre 0 i 10 en funció de la seva qualitat, quantitat i nombre d'autors.

La nota final N de l'assignatura es calcularà amb la fórmula

$$N = \frac{2}{10}T + \frac{(10 - \frac{2}{10}T)}{10}M = M + T \left(\frac{10 - M}{50} \right), \quad (1)$$

on

$$M = \max \left(\frac{2P + 8F}{10}, F \right).$$

Per aprovar l'assignatura caldrà obtenir una nota mínima de 5:

$$N \geq 5.$$

Els alumnes que hagin obtingut una nota final $N < 5$ podran presentar-se a una segona convocatòria de l'examen final que tindrà lloc al setembre. La nota d'aquest segon examen serà un nombre S entre 0 i 10. La nota final de la segona convocatòria es calcularà amb la fórmula (1) anterior substituint M per S .

6 Bibliografia

Bibliografia bàsica

- M. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad, 1990.
- S. Montiel i A. Ros, *Curvas y superficies*. Proyecto Sur, 1997.
- A. López de la Rica i A. de la Villa Cuenca, *Geometría Diferencial*. CLAGSA, 1997.

Bibliografia complementària

- M. Berger i B. Gostiaux, *Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces*, Publications universitaires de France, 1992.
- L.A. Cordero, M. Fernández i A. Gray, *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- J. Girbau, *Geometria diferencial i relativitat*. Manuals UAB n.10, 1993.
- D. Hilbert i S. Cohn Vossen, *Geometry and the imagination*. Chelsea Publishing Company, 1990.
- W. Kühnel, *Differential Geometry. Curves - Surfaces - Manifolds*. Student Mathematical Library, vol. 16, American Mathematical Society, 2002.
- A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*. Springer, 2001.
- A. V. Pogorelov, *Geometría Diferencial*, Mir, 1984.
- M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. III, Publisher or Perish, 1975.
- D. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, 1988.

7 Professors

- Teoria: David Marín, despatx C1/126, Tel. 4540, e-mail: davidmp@mat.aub.es
- Problemes: Judit Abardia, despatx C1/212, Tel. 1886, e-mail: juditab@mat.uab.es