

# GUIA DOCENT D'ÀLGEBRA COMMUTATIVA I GEOMETRIA ALGEBRAICA

## 1.- IDENTIFICACIÓ DE L'ASSIGNATURA.

Nom: Àlgebra commutativa i geometria algebraica

Crèdits: 6

Tipus: Optativa (semestral)

2.- OBJECTIUS. El principal objectiu de l'assignatura és que l'estudiant conegui els resultats bàsics de la teoria d'anells commutatius noetherians, i la seva aplicabilitat en els camps de la geometria algebraica i de l'aritmètica. Així doncs, s'espera que al final del curs l'estudiant conegui l'existència de descomposicions primàries d'ideals en anells noetherians i el seu significat en el cas d'anells de nombres o de quocients d'anells de polinomis. També es pretén mostrar les implicacions en geometria de resultats algebraics com els teoremes de la base i dels zeros de Hilbert, i el lema de normalització de Noether. Finalment, l'estudiant hauria de ser capaç de dur a terme els càlculs propis d'aquesta matèria, tant de forma manual com mitjançant paquets informàtics.

## 3.- CONTINGUTS

### I. Anells commutatius noetherians

Nocions bàsiques. Operacions sobre ideals. Descomposició primària. Localització. Topologia de Zariski. Espectre. Anells noetherians. Teorema de la base de Hilbert. Descomposició primària en anells noetherians. Anells Artinians.

### II. Mòduls i àlgebres

Nocions bàsiques. Lema de Nakayama. Complexos i exactitud. Àlgebres. Extensió i restricció d'escalars. Dependència entera. Teorema dels Zeros de Hilbert. Propietats locals. Normalització.

### III. Mètodes efectius

Anells graduats. Ordres monomials. Bases de Gröbner. Aplicacions.

## 4.- TEMPS QUE HA DE DEDICAR UN ALUMNE A L'ASSIGNATURA.

<i>TIPUS D'ACTIVITAT</i>	<i>Descripció</i>	<i>Hores</i>
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de teoria	45
	Classes de problemes	15
	Classes de pràctiques	
	Activitats tutoritzades	6
	Realització de proves parcials	
	Realització d'exàmens finals	4
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de teoria	30
	Realització de problemes	30
	Preparació de pràctiques	
	Preparació de treballs	
	Preparació d'exàmens	20
TOTAL		150

## 5.- CAPACITATS O DESTRESES A ADQUIRIR.

**Capacitats teòriques.** - Entendre les nocions d'anell commutatiu, ideal, primer i maximal. Entendre la construcció d'anells quocient, i les caracteritzacions dels ideals primers i maximals en termes de

dominis d'integritat i de cossos. Entendre les nocions d'ideal radical i ideal primari i la seva relació amb els ideals primers. Entendre la noció de descomposició primària i les seves propietats d'unicitat. Entendre la noció d'anell local i localitzat. Entendre la noció d'espectre d'un anell commutatiu, i tenir clara la seva topologia. Entendre les nocions d'anell noetherià i artinià, i les seves propietats d'estabilitat per localització i pas al quocient. Entendre profundament el teorema de la base de Hilbert. Entendre les implicacions de la noetherianitat per a l'existència i unicitat de descomposicions primàries. Entendre la noció de dimensió de Krull i la caracterització dels anells artinians com a anells noetherians de dimensió zero. Entendre les nocions de mòdul i àlgebra sobre un anell. Entendre les nocions de suma, quocient i transportador de submòduls. Entendre les nocions de suma directa i producte de mòduls. Entendre la noció de mòdul finitament generat. Entendre les nocions de complex i successió exacta, i el lema de la serp. Entendre la noció de producte tensorial. Entendre les nocions de mòdul noetherià i artinià. Entendre la noció de dependència entera. Entendre profundament el teorema dels zeros de Hilbert. Entendre els teoremes de “going up” i “going down” per cadenes d'ideals primers. Entendre el lema de normalització de Noether. Copsar la relació entre les diverses nocions de dimensió. Entendre la noció de propietat local, i tenir clar quines de les propietats considerades en el curs ho són. Entendre la noció d'anell graduat, i les propietats que caracteritzen la noetherianitat dels anells graduats. Entendre les nocions d'ordre monomial i terme dominant. Entendre la noció de base de Gröbner i el criteri i l'algoritme de Buchberger.

**Capacitats de problemes** - Saber manipular expressions algebraiques en anells commutatius, incloent les propietats d'elements divisors de zero, nilpotents, idempotents. Saber calcular nuclis i imatges de morfismes d'anells. Conèixer i saber utilitzar les representacions gràfiques d'espectres d'anells. Saber operar amb ideals, entenent les nocions de suma, producte, extensió i contracció d'ideals. Tenir certa habilitat en el càlcul de descomposicions primàries. Saber trobar descomposicions irreductibles de tancats en espectres mitjançant descomposicions primàries d'ideals i els seus primers minimalis. Saber calcular en anells localitzats arbitraris. Saber utilitzar les condicions de cadena, així com altres caracteritzacions conegudes, per decidir la noetherianitat i l'artinianitat d'anells. Saber operar amb productes tensorials, sumes, productes, quocients i transportadors de mòduls, i ser capaç d'explotar les propietats dels mòduls plans o finitament generats. Ser capaç d'utilitzar el lema de Nakayama. Ser capaç de traslladar els teoremes de descomposició primària per ideals al context de mòduls. Saber utilitzar la restricció i l'extensió d'escalars. Saber operar amb extensions enteres, i amb anells de valoració. Saber utilitzar la noció d'alçada, i la seva relació geomètrica amb la codimensió. Ser capaç d'utilitzar els teoremes de “going up” i “going down”. Saber manipular anells, ideals i mòduls mitjançant el programa “Singular”. Saber treballar amb diferents ordres monomials per explotar les capacitats dels ordinadors i saber esquivar les febleses dels mètodes efectius.

6.- REQUISITS. Per tal que un alumne pugui superar l'assignatura és imprescindible tenir assumits els coneixements propis de les assignatures obligatòries d'àlgebra. També és recomanable una certa familiaritat almenys amb la geometria projectiva.

7.- METODOLOGIA. L'assignatura disposa, al llarg del curs acadèmic de tres hores de classe de teoria i una hora de classe de problemes. Es recomana fortament l'assistència a aquestes sessions. Periòdicament, l'estudiant rebrà unes llistes de problemes que ha de pensar i sobre els quals es treballarà a les classes de problemes. Cada setmana, cada alumne haurà de presentar un dels problemes de la llista resolt, ja sigui a la pissarra o per escrit i entregat al professor. D'aquests problemes sortiran unes qualificacions que seran la part fonamental de la nota final del curs. Igualment, periòdicament es faran sessions tutoritzades de treball amb paquets informàtics de manipulació simbòlica com “Singular”.

8.- AVALUACIÓ. Cada setmana, els estudiants han de lliurar o explicar a classe les solucions dels problemes que periòdicament seran proposats. Aquests problemes, que poden tenir un component de

teoria, seran avaluats, donant lloc a una nota d'avaluació continuada (AC). Al final del curs es farà un examen, que constarà d'un tema teòric i un problema, del qual en sortirà una segona nota (EF). La nota final serà el màxim de les dues notes AC i EF.

#### 9.- BIBLIOGRAFIA.

M. Atiyah, I. Macdonald, "Introducción al álgebra conmutativa"  
E. Kunz, "Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry"  
N. Jacobson, "Basic Algebra I", "Basic Algebra II"  
H. Matsumura, "Commutative Algebra"  
O. Zariski, P. Samuel, "Commutative Algebra"  
D. Eisenbud, "Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry"

#### 10.- PROFESSORAT.

Joaquim Roé Vellvé

Hores de consulta: dimarts i dimecres, 17:00 – 18:00

Altres hores: a convenir.

Contacte: despatx C1/-130, tel: 935812534, email: jroe@mat.uab.es.