

# LLICENCIATURA DE MATEMÀTIQUES

## Guia docent de l'assignatura: TEORIA DE FUNCIONS

### 1.- IDENTIFICACIÓ DE L'ASSIGNATURA.

Nom: Teoria de Funcions

Codi: 28028

Crèdits: 6

Tipus: Optativa del segon quadrimestre.

Curs: 2005-2006

Horari de les classes de teoria: dimarts de 11:00 a 12:00 i dijous de 9:00 a 10:00 a l'aula C1/-128

Horari de les classes de problemes: dijous de 10:00 a 11:00 a l'aula C1/-128.

### 2.- OBJECTIUS.

En aquesta assignatura s'aprofundeix en tres conceptes importants de l'Anàlisi Matemàtica. En primera part del curs s'estudia la teoria de la mesura i és una continuació de l'assignatura Anàlisi Real i Funcional de quart curs. En la segona part s'estudia com són les funcions enteres o meromorfes a tot el pla complex i en la tercera s'inicia l'estudi de les funcions harmòniques de dues variables. Aquestes dues parts són una continuació natural de l'assignatura d'Anàlisi Complexa de quart curs.

### 3.- CONTINGUT.

#### 1. Teoria de la mesura.

1.1 Mesures amb signe i complexes. Variació total.

1.2 Teoremes de descomposició de Hahn i de Jordan.

1.3 Mesures absolutament contínues respecte a una altra. Teorema de Radon-Nikodym.

1.4 Mesures singulars. Teorema de descomposició de Lebesgue.

1.5 Aplicacions: Integració respecte a una mesura complexa, duals dels espais  $L^p$ .

#### 2. Funcions enteres i funcions meromorfes al pla complex.

2.1 Productes infinits de números complexos.

2.2 Convergència uniforme sobre els compactes de successions de funcions contínues.

2.3 Productes infinits de funcions analítiques. El teorema de factorització de Weierstrass.

2.4 Teorema de Mittag-Leffler a  $\mathbb{C}$ . Mètode de Cauchy de descomposició.

2.5 Exemples de descomposició de funcions enteres i meromorfes a factors simples i aplicacions (números de Bernoulli, funció Gamma, etc.) acotada.

#### 3. Funcions harmòniques de dues variables reals.

- 3.1 Funcions harmòniques. Propietats. Propietat de la mitjana integral.
- 3.2 Funcions harmòniques en el disc unitat. Nucli de Poisson. Problema de Dirichlet al disc unitat.
- 3.3 Problema de Dirichlet en altres dominis.
- 3.4 Fórmula de Jensen i de Poisson-Jensen.
- 3.5 Zeros de funcions holomorfes i acotades en del disc unitat. Productes de Blaschke.

#### 4.- TEMPS QUE HA DE DEDICAR UN ALUMNE A L'ASSIGNATURA.

És impossible fixar el número d'hores que un alumne "ideal" hauria de dedicar a fi de que una vegada dutes a terme pogués assegurar que té l'assignatura assimilada i per tant l'aprovarà. Això depèn de molts factors: qualitat de concentració per hora d'estudi, formació prèvia, capacitat de memòria, intel·ligència de la persona, claredat de l'exposició del professor, ajut en les tutories del professor, nota que l'alumne vol assolir, etc. Per tant la següent taula s'ha de prendre de forma aproximada i en tot cas és un mínim de dedicació. Aquesta dedicació es recomana que sigui uniforme a llarg de tots els dies de la setmana de tot el quadrimestre (incloent també l'època d'exàmens).

TIPUS D'ACTIVITAT	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de teoria	28
	Classes de problemes	14
	Activitats tutoritzades	4
	Realització d'exàmens finals	5
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de la teoria	42
	Realització de problemes	35
	Recerca de bibliografia	5
	Realització de problemes específics	12
	Preparació d'exàmens	12
<b>TOTAL</b>		<b>157</b>

#### 5.- CAPACITATS O DESTRESES A ADQUIRIR.

Per tal que un alumne superi l'assignatura entenem que és imprescindible que adquireixi la major part de les següents capacitats.

##### Capacitats teòriques.

Pel que fa aquest tipus de capacitats, l'alumne ha de tenir clars els conceptes que ara ressaltem.

- (0) Tenir ben assimilats conceptes que en el curs es necessitaran, però que han estat desenvolupats en cursos anteriors. Per exemple: mesures positives, teorema de la convergència dominada, funció holomorfa, fórmula de Cauchy, el suprem d'un conjunt de números reals, convergència uniforme, espai de Banach, etc.
- (1) Entendre què és una mesura complexa, la seva variació, la part real, la part imaginària, les parts positiva i negativa d'una mesura real.
- (2) Diferència entre mesures absolutament contínues i singulars respecte a la mesura de Lebesgue.
- (3) Entendre i saber demostrar els teoremes de descomposició i derivació de mesures. Captar la seva importància.
- (4) Entendre la noció de producte infinit convergent i absolutament convergent i saber comparar-la amb les sèries.
- (5) Comprendre perquè la convergència uniforme sobre els compactes és l'adequada amb funcions holomorfes.
- (6) Saber demostrar els teoremes que permeten veure com són les funcions enteres a  $\mathbb{C}$  sabent els seus zeros i com són les meromorfes si tenim els seus pols.
- (7) Conèixer les diferents definicions de funció harmònica a  $\mathbb{C}$ .
- (8) Comprendre com apareix el nucli de Poisson al disc unitat i perquè és útil.
- (9) Entendre que la fórmula de Jensen permet estudiar la distribució de zeros de les funcions holomorfes al disc unitat si aquestes tenen alguna limitació al seu creixement.

### **Capacitats de problemes.**

Les capacitats que s'espera que l'alumne adquireixi seran les fixades per les llistes de problemes (que es treballaran durant les classes de problemes) i els problemes addicionals. Hi haurà dos tipus de problemes:

- (1) De caràcter molt pràctic i de càlcul. Per exemple: trobar la factorització de la funció  $f(z)=\sin(\pi z)$ ; la descomposició en fraccions simples de  $g(z)=\pi \cotg(\pi z)$ ; càlcul d'una suma d'una sèrie o d'un producte; descomposició de Lebesgue d'una mesura concreta; solució d'un problema de Dirichlet; etc.
- (2) De caràcter teòric. Aplicant diversos teoremes de teoria, conceptes i idees vistes s'arriba a la solució del problema.

Per tipus d'assignatura hi haurà més proporció dels problemes del grup (2).

### **6.- REQUISITS PREVIS.**

L'alumne que cursa l'assignatura de Teoria de Funcions ha d'haver superat l'assignatura Anàlisi Complexa de tercer curs i ha d'haver cursat l'assignatura Anàlisi Real i Funcional de quart curs.

Si l'alumne no ha superat la segona assignatura esmentada, es recomana que repassi la part de la construcció i ús de la mesura de Lebesgue i els rudiments d'espais de Banach.

Tanmateix, és d'utilitat haver adquirit els coneixements de l'assignatura Probabilitat, principalment en la part que es relaciona amb la teoria de la mesura abstracta.

## 7. METODOLOGIA.

L'assignatura disposa, al llarg del segon quadrimestre del curs acadèmic de dues hores de classe de teoria i una hora de classe de problemes. El professor fa l'esforç de sintetitzar i trametre de la manera que sap més entenedora els conceptes de la teoria. També dona idees que no estan als llibres i ressaltar els punts importants. Per això es recomana forçament l'assistència a les sessions de classe. En cas de no fer-ho, la situació més corrent és que per assimilar el contingut d'una hora d'explicació l'alumne necessitarà moltes més hores de dedicació.

S'obrirà una aplicació d'aquesta assignatura al Campus Virtual de la UAB per tal de subministrar el material i la informació relativa a l'assignatura que li calgui a l'estudiant.

Periòdicament, l'estudiant rebrà unes llistes, les mateixes per a tothom, de problemes que ha de pensar i resoldre, sobre els quals es treballarà a les classes de problemes. En aquestes, donat el poc número d'hores disponible, no es resoldran completament tots els problemes proposats. És valorarà positivament la resolució pública d'un problema a l'hora de classe per part d'un alumne.

El professor fixarà un horari en el qual estarà a disposició dels alumnes de l'assignatura. Es recomana fer ús d'aquestes hores tutoritzades, ja sigui per dubtes de teoria, de problemes o de la resolució dels problemes individuals proposats.

## 8.- AVALUACIÓ.

Tots els alumnes rebran, al llarg del quadrimestre, un mateix número de problemes individuals que hauran de resoldre i lliurar-los al professor. Amb la correcció d'aquests problemes l'alumne obtindrà una nota (**Prob**).

El dia **21 de juny de 2006** es realitzarà un examen en el que s'avaluarà si l'alumne ha assolit els objectius i les capacitats abans esmentades. La prova tindrà una part teòrica i una part de problemes i exercicis. La part teòrica valdrà el 25% de la nota total de l'examen. La nota la designem per (**ExJun**).

La qualificació final, en la primera convocatòria, s'obtindrà amb la fórmula (arrodonint a un decimal)

$$\text{màx}\{0,8*\text{ExJun} + 0,2*\text{Prob}, \text{ExJun}\} + \text{Notclasse}$$

La **Notclasse** serà un número entre 0 i 0,4 que s'haurà obtingut amb la resolució pública dels problemes de classe.

Si l'alumne no supera l'assignatura a la primera convocatòria, tindrà dret a fer un altre examen el dia **4 de setembre de 2006** amb les mateixes

característiques que l'examen de juny. Si d'aquest examen obté la qualificació (**ExSet**), la qualificació en la segona convocatòria serà:

$$\max\{0,8*\text{ExSet} + 0,2*\text{Prob}, \text{ExJun}\} + \text{Notclasse}$$

Si un alumne no ha pogut lliurar els problemes a temps com per a tenir la nota **Prob** al juny, ho podrà fer fins el **4 de setembre de 2006** si es presenta a la segona convocatòria. Amb el sistema actual de qualificacions no hi ha possibilitat de superar nota, llevat que es renunciï a la nota del juny, cosa que no és aconsellable.

**Nota:** Les dates dels exàmens són les oficials. De totes maneres s'aconsella confirmar-les a l'inici del període d'exàmens mirant aquestes informacions als taulells de la Facultat de Ciències o de la Secció de Matemàtiques o bé a la pàgina web <http://mat.uab.es/seccio>.

## 9.- BIBLIOGRAFIA.

L'estudiant de segon cicle de Matemàtiques ha d'estar acostumar a fer ús, sense dificultats, de qualsevol tipus de recurs bibliogràfic que li permeti entendre millor (i completar) la informació que s'ha explicat a classe. Els llibres de la següent llista inclouen els continguts del curs.

1. **W. Rudin**, *Análisis Real y Complejo*. Ed. Alhambra. 1985.
2. **D. L. Cohn**, *Measure Theory*, Birkhäuser, 1980.
3. **L.V. Ahlfors**, *Complex Analysis*, McGraw-Hill. 1979.
4. **J. B. Conway**, *Functions of one complex variable*, second edition, 1986.
- 5.- **S. Saks** and **A. Zygmund**, *Analytic Functions*, third edition, Elsevier Publishing Company, 1971.

Els llibres de la llista anterior formen part del fons bibliogràfic de la Biblioteca de Ciències i Enginyeries. Es recomana que, per cada ítem del programa del curs, consulteu un llibre diferent dels de la llista i compareu com en aquell llibre concret es tracta el tema en qüestió.

## 10. PROFESSORAT.

Professor de teoria i problemes: Joan Josep Carmona

Despatx: C1/112 (torre de Matemàtiques)

Correu: JoanJosep.Carmona@uab.es

Telèfon: 93 581 45 37

Horari de tutories: dimecres de 11:00 a 14:00 i de 18:30 a 20:00.