

LLICENCIATURA DE MATEMÀTIQUES

Curs 06/07

GUIA DOCENT DE CàLCUL INFINITESIMAL

1.- IDENTIFICACIÓ DE L'ASSIGNATURA.

Nom: Càlcul Infinitesimal

Codi: 27989

Crèdits: 15

Tipus: Obligatòria (anual)

Horari de les classes de teoria: dimarts de 15 a 17 i dijous de 16 a 17.

Horari de les classes de problemes: dimarts de 17 a 18 i dimecres de 15 a 16 .

Horari de les classes de problemes dirigits: veure <http://mat.uab.es/seccio>.

2.- OBJECTIUS.

El principal objectiu de l'assignatura és que l'estudiant es familiaritzi amb la teoria de funcions d'una variable real. Així doncs es pretén que l'estudiant entengui el concepte de límit tant de successions com de funcions d'una variable, el concepte de derivada i d'integral. Tanmateix es pretén que l'alumne adquireixi una certa destresa en la manipulació i càlcul de límits, derivades i integrals i que sàpiga aplicar els teoremes bàsics d'aquesta teoria.

3.- CONTINGUTS

1. La recta real.

- Els números racionals i la seva incompletitud.
- Suprem i ínfim d'un conjunt.
- El conjunt dels nombres reals.
- Desigualtats entre números reals.
- Numerabilitat.
- Els números complexos.

2. Successions de nombres reals.

- Successions de nombres reals.
- Límit d'una successió. Propietats algebraiques.
- Monotonia i acotació d'una successió.
- Límit infinit.
- Punts d'acumulació. Successions parcials. El Teorema de Bolzano-Weierstrass.
- Successions de Cauchy. El criteri de Stolz.

3. Continuitat de funcions.

- Funcions de variable real. Domini d'una funció.
- Límit d'una funció en un punt. Propietats algebraiques. Límits laterals.
- Continuitat d'una funció.
- Teorema de Bolzano. Teorema dels valors intermitjos. Teorema de Weierstrass. Conseqüències.
- Funcions monòtones.
- Funció inversa. Continuitat de la funció inversa.
- La funció exponencial.
- La funció logarítmica.
- Les funcions trigonomètriques.

4. Derivació.

- Derivada d'una funció en un punt.
- Propietats algebraiques de la derivada.
- Interpretació geomètrica de la derivada.
- Relació entre derivabilitat i continuïtat.
- Regla de la cadena. Derivació de la funció inversa.
- Extrems d'una funció.
- Teorema de Rolle. Teorema del Valor mitjà. Teorema del valor mitjà generalitzat.
- Aplicacions al càlcul de zeros de funcions i a l'obtenció de desigualtats.
- Regla de l'Hôpital.

5. Derivades d'ordre superior.

- Derivada d'ordre n d'una funció en un punt.
- Ordre de contacte entre funcions.
- Polinomi de Taylor. Propietats.
- Polinomis de Taylor de funcions elementals.
- Convexitat de funcions. Convexitat i continuïtat.
- Estudi de la gràfica d'una funció.

6. Integral de Riemann.

- Sumes superiors i inferiors de funcions acotades.
- Funcions integrables. Integral.
- Criteri d'integrabilitat.
- Integrabilitat de les funcions monòtones i de les funcions contínues.
- El Teorema Fonamental del Càlcul. Primitiva d'una funció.
- El Teorema del canvi de variable.
- La fórmula d'integració per parts.
- Càlcul de primitives.
- Sumes de Riemann. Aplicacions al càlcul d'àrees, longitud de gràfiques i volums de revolució.

4.- TEMPS QUE HA DE DEDICAR UN ALUMNE A L'ASSIGNATURA.

El temps previst en la següent taula és aproximat i, evidentment, cada estudiant l'ha d'adaptar a la seva situació. En qualsevol cas i tenint en compte que aquesta assignatura li correspon el 25 % dels crèdits de primer curs, heu de pensar que heu de

dedicar-li de l'ordre de 10-12 hores setmanals (classes presencials incloses) i que aquesta dedicació no ha baixar en època d'exàmens.

TIPUS D'ACTIVITAT	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de teoria	82
	Classes de problemes	54
	Classes de pràctiques	0
	Activitats tutoritzades	36
	Realització de proves parcials	8
	Realització de'exàmens finals	8
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de teoria	60
	Realització de problemes	90
	Recerca Bibliogràfica	5
	Preparació de pràctiques	1
	Preparació de treballs	0
	Preparació d'exàmens	24
TOTAL		368

5.- CAPACITATS O DESTRESES A ADQUIRIR.

Per tal que un alumne superi l'assignatura entenem que és imprescindible que adquireixi les següents capacitats.

Capacitats teòriques.

- Entendre la noció de nombre real i la incompletitud dels racionals a recta.
- Entendre la noció de suprem d'un conjunt, tenir clar quins subconjunts de \mathbf{R} tenen suprem i saber fer servir els diferents criteris que tenim per tal de poder assegurar que un nombre real és el suprem d'un conjunt..
- Entendre la noció de conjunt numerable i "l'estabilitat" de la numerabilitat respecte de operacions com la unió o el producte cartesià.
- Entendre profundament la noció de successió convergent.
- Entendre la noció de punt d'acumulació d'una successió.
- Tenir clara la relació entre convergència d'una successió i la unicitat dels punts d'acumulació.
- Entendre les nocions de límit d'una funció en un punt, límit en el infinit i límits laterals.
- Saber reproduir arguments del tipus epsilon-delta per tal de provar que un determinat nombre real és el límit d'una funció en un punt.
- Entendre el concepte de funció contínua.
- Entendre la noció de funció inversa i les seves propietats pel que fa a la continuïtat o derivabilitat.
- Tenir clara la construcció de les funcions exponencial i logarítmica.
- Entendre el significat geomètric de funció derivable en un punt.
- Entendre els teoremes bàsics sobre derivació, és a dir, el Teorema de Rolle, el Teorema del valor mig i el Teorema del valor mig generalitzat.
- Entendre què vol dir que una funció sigui convexa i tenir clar el significat geomètric de la convexitat.

- Tenir molt clar el fet de la continuïtat de les funcions convexes sobre intervals oberts així com
- Entendre clarament el significat d'ordre de contacte entre funcions i entendre la seva utilització en el moment de determinar si un polinomi és el polinomi de Taylor d'una funció.
- Entendre el significat de les sumes de Riemann.
- Relacionar les nocions de monotonia o continuïtat amb la integrabilitat.
- Entendre profundament el Teorema Fonamental del Càlcul.

Capacitats de problemes

- Saber manipular desigualtats entre nombres reals.
- Conèixer i saber utilitzar les gràfiques i les propietats de les funcions elementals.
- Saber decidir la numerabilitat de certs conjunts.
- Saber abordar la convergència d'una successió a través de diversos criteris com el de Cauchy, el del sandwich, la seva possible monotonia i acotació, els criteris de l'arrel, del quocient i de Stoltz.
- Saber calcular límits de successions elementals fent servir i tenint molt clara la "jerarquia" que existeix entre les successions n^n , n factorial, a^n i $\log n$.
- Saber calcular els límits superior e inferior de successions.
- Tenir certa habilitat en la utilització dels teoremes de Bolzano i de Weierstrass.
- Saber calcular derivades de funcions.
- Saber fer servir els teoremes bàsics sobre derivació, és a dir, el Teorema de Rolle, el Teorema del valor mig i el Teorema del valor mig generalitzat.
- Saber obtenir desigualtats fent servir el Teorema del valor mig.
- Saber conjugar els teoremes de Bolzano i el Teorema de Rolle per tal de trobar el nombre de solucions d'algunes equacions.
- Saber calcular límits de funcions amb la regla de l'Hôpital.
- Saber calcular polinomis de Taylor de funcions elementals.
- Utilitzar eficientment els polinomis de Taylor en el moment de calcular certs límits.
- Saber utilitzar el Teorema de Taylor per tal de provar certes desigualtats.
- Obtenir cotes de l'error en fer aproximacions de Taylor.
- Saber determinar si una funció és integrable.
- Calcular primitives de funcions.

D'altra banda, i pensant en la formació de l'alumne com a futur professional de la Matemàtica, creiem que s'ha d'aprofitar l'assignatura per tal de desenvolupar les competències següents.

- Capacitat d'expressar correctament, des del punt de vista formal, qualsevol resultat.
- Capacitat de calcular, de "rutinitzar" determinats processos matemàtics.
- Capacitat de conjecturar i d'imaginar estratègies per tal de confirmar o rebutjar aquestes conjectures.

- Capacitat d'identificar objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb d'altres coneguts i de deduir-ne propietats.
- Capacitat de treballar en grup.
- Capacitat d'utilitzar eficientment la bibliografia i recursos d'Internet.

6.- REQUISITS.

Per tal que un alumne pugui cursar l'assignatura és imprescindible que tingui una certa destresa en la manipulació algebraica de fraccions o d'expressions que continguin arrels, potències, etc. Tanmateix és molt aconsellable que l'estudiant tingui amplis coneixements de trigonometria, que sàpiga les raons trigonomètriques de la suma i de l'angle doble. Finalment, és d'esperar que l'estudiant pugui fer, sense gaire dificultat, la representació gràfica de funcions racionals relativament senzilles.

Pressuposem també que la persona que cursa aquesta assignatura està familiaritzada amb raonaments de tipus lògic, que sap negar frases o proposicions, etc.

Si un estudiant creu que té deficiències en algun aspecte tractat al Batxillerat, la Secció de Matemàtiques té previst posar en marxa un curs propedèutic que començarà el proper 6 de setembre de 2006. Per a més informació podeu consultar la web <http://mat.uab.es/seccio>. Tot i així, també podeu demanar un professor tutor que us pugui orientar en el desenvolupament d'aquest primer curs. Per tal de fer-ho heu de sol·licitar-ho al coordinador de la titulació.

7.- METODOLOGIA.

L'assignatura disposa, al llarg del curs acadèmic de tres hores de classe de teoria, dues hores de classe de problemes i una mitjana d'una hora setmanal de problemes dirigits. Es recomana fortament l'assistència a aquestes sessions.

S'obrirà una aplicació d'aquesta assignatura al Campus Virtual de la universitat per tal de subministrar tot el material i tota la informació relativa a aquesta assignatura que li calgui a l'estudiant.

Pel que fa a les classes de teoria, l'alumne disposarà, abans del començament de cada capítol de l'assignatura, d'uns apunts que li poden servir d'orientació. És molt important que l'estudiant hagi treballat personalment sobre aquest material abans d'anar a classe.

Periòdicament, l'estudiant rebrà unes llistes de problemes que ha de pensar i sobre els quals es treballarà tant a les classes de problemes com a les classes de problemes dirigits.

A banda d'això, quinzenalment, el professor proposarà un problema que s'ha de lliurar resolt en el termini fixat. Sobre aquests problemes, l'alumne serà entrevistat periòdicament i d'aquesta entrevista sortiran unes qualificacions que comptaran en la nota final del curs. La data i el lloc on se celebraran aquestes entrevistes serà

Per tal de facilitar la realització d'aquests problemes, personal relacionat amb l'assignatura estarà a disposició de l'alumne durant tres hores, cada setmana a l'aula C1/-128. És important que l'alumne aprofiti aquests recursos.

Finalment, i per tal de dosificar millor l'esforç de l'estudiant, es faran dues proves al llarg del curs.

8.- AVALUACIÓ.

Primera Convocatòria (Juliol)

Un 25% de la nota correspon a l'avaluació continuada. Aquesta nota s'obté de:

- Entrega i correcció dels problemes,
- Les entrevistes en què es discutiran els problemes anteriorment lliurats i,
- 2 proves d'una durada de dues hores.

D'aquí s'obtindrà una nota sobre 10 que anomenarem c .

L'altre 75% es farà amb notes d'examens. Aquesta nota es pot obtenir de 2 maneres

Per parcials

Al final de cada semestre es farà un examen sobre la matèria d'aquell semestre. L'alumne obtindrà així dues notes P_1 i P_2 (sobre 10) del primer i del segon parcial respectivament.

Si un alumne té les notes $P_1 \geq 3$ i $P_2 \geq 3$, llavors la seva nota per parcials és

$$N_1 = 0.25 c + 0.35 P_1 + 0.4 P_2.$$

Si $N_1 \geq 5$, llavors l'alumne pot triar entre dues opcions:

- Que N_1 sigui la seva nota a la convocatòria de juny.
- Presentar-se a l'examen final per millorar aquesta nota. En aquest cas l'alumne obtindrà com a mínim la nota N_1 a la convocatòria de juliol.

Per final

Després del segon parcial es farà un examen final de tota l'assignatura. Diguem J a la nota d'aquest examen i posem $N = 0.25 c + 0.75 J$.

La nota de la convocatòria de juliol és:

$$\max(N_1, N, 5) \text{ si } j \geq 5 \text{ o } \max(N_1, N) \text{ si } j < 5.$$

Nota: Si un alumne té la nota $N_1 < 5$ i no es presenta a l'examen final tindrà un "no presentat" a la convocatòria

de juliol.

Segona Convocatòria (Setembre)

Hi haurà un examen global de tota l'assignatura. Aleshores la nota de la segona convocatòria s'obté seguint el mateix procés de la primera convocatòria (per final) substituint la nota de l'examen final de juliol (J) per la de l'examen de setembre (S).

9.- BIBLIOGRAFIA.

- **M. Spivak.** *Calculus. Càlcul Infinitesimal.* Ed. Reverté, Barcelona 1995.

L'assignatura de Càlcul Infinitesimal consisteix, essencialment, en les tres primeres parts d'aquest llibre. És un llibre altament recomanable i en ell podreu trobar problemes molt il·lustratius. Malgrat això, les nocions de funció creixent, funció decreixent, convexitat i concavitat presentades en aquest llibre seran lleugerament diferents a les que presentarem a la nostra assignatura.

- **J. M. Ortega.** *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica.* Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona 4, Bellaterra 1990.

El nostre curs consisteix en els cinc primers capítols d'aquest llibre. Tot i que el plantejament que aquí se segueix pel que fa a la introducció dels nombres reals és diferent del que farem nosaltres, aquest text us serà de molta utilitat.

- **F. Galindo i altres.** *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en una variable real.* Ed. Thomson, Madrid 2003.

Aquest és un llibre eminentment pràctic. Conté una gran varietat de problemes resolts de diversa dificultat i us pot ser de molta utilitat en el moment de buscar exemples o preparar les classes de problemes. Els capítols que tenen relació amb l'assignatura són el 2, el 3, el 5, el 6, el 7 i el 8. La resta us pot ajudar en assignatures com Anàlisi Matemàtica I de segon curs.

- **D. Pestana i altres.** *Curso práctico de Cálculo y Precálculo.* Ariel Ciencia, Barcelona 2000.

El plantejament d'aquesta obra és similar a l'anterior, és a dir, presenta l'assignatura des d'un punt de vista més pràctic. Tot i que el nivell d'aquest llibre és inferior al que es demanarà a la nostra assignatura, les persones que tinguin dificultat en, per exemple, calcular primitives el poden fer servir com a guia.

10.- PROFESSORAT.

Teoria.

Joan Mateu
C1/346
mateu@mat.uab.cat
93 581 4551

Problemes.

Berta Barquero
C1/-168
barquero@mat.uab.es
93 581 3103

José I. Monreal
C1/-168
pellicer@mat.uab.es
93 581 3103

Juan J. Donaire
C1/306
donaire@mat.uab.es
93 581 2906