

Presentació i Objectius de l'assignatura

Aquest curs és una iniciació a la teoria moderna de sistemes dinàmics. Un primer objectiu és que l'alumne es familiaritzi amb la noció abstracte de sistema dinàmic i els conceptes bàsics d'aquesta teoria: estabilitat, atractor, conjunts invariants, omega límits, etc. Aquests seran doncs els continguts del primer capítol mentre que el segon capítol el dedicarem a entendre com és el comportament local, tant dels sistemes dinàmics discrets com els continus, en l'entorn d'un punt d'equilibri o d'una òrbita periòdica. Aquest comportament local es basa en la classificació topològica dels sistemes lineals a $\mathbb{R}^n$, tant els que venen determinats pel flux d'equacions diferencials ordinàries (sistemes dinàmics continus) com els que provenen de la iteració de funcions (sistemes dinàmics discrets). Els sistemes lineals són molt importants. D'una banda perquè apareixen en l'estudi de molts fenòmens físics d'interès i d'altra banda perquè són la primera aproximació de sistemes més complicats.

Una segona part de l'assignatura correspon a l'estudi qualitatiu de les equacions diferencials autònomes a $\mathbb{R}^n$. La Teoria qualitativa de les equacions diferencials es va iniciar amb els treballs de Poincaré cap a l'any 1880 en relació amb els seus treballs de Mecànica Celest i tracta de conèixer propietats de les solucions sense necessitat de resoldre les equacions, entre altres coses perquè la resolució no és factible. Aquest enfoc qualitatiu, quan es combina amb mètodes numèrics adequats, és, en alguns casos, equivalent a tenir les solucions de l'equació. Tractarem doncs de que l'alumne conegui alguns resultats bàsics de la teoria qualitativa (Teoremes de Liapunov, Teorema de Hartman i Teoremes de les varietats estable i central) sobre l'estructura local dels punts crítics i les òrbites periòdiques i en el cas de $\mathbb{R}^2$ s'iniciï en el problema de detectar l'existència d'òrbites periòdiques via els teoremes de Poincaré-Bendixon i Bendixon-Dulac.

A la última part del curs tractarem els problemes de la dinàmica global discreta. L'exemple principal serà el d'una família paramètrica de sistemes dinàmics discrets: les aplicacions unimodals, i que (per alguns valors dels paràmetre) presenten una dinàmica que porta de manera senzilla a la noció de sistema caòtic. Per aquests sistemes l'aproximació numèrica no és factible i per entendre la seva dinàmica calen noves eines. Per l'aplicació logística veurem que el sistema dinàmic és equivalent a l'anomenat shift de Bernoulli, i aquest ens permetrà interpretar el comportament de les òrbites. Acabarem

el curs amb un sistema dinàmic discret caòtic dos dimensional: la ferradura de Smale. Els sistemes caòtics es presenten sovint a les aplicacions (problemes de predicció meteorològica, circuits elèctrics, etc).

Competències a adquirir

En aquest curs posarem especial èmfasi en les competències instrumentals. Les competències de tipus pràctic variaran d'un alumne a l'altra i dependran dels exercicis escollits.

- Competències teòriques
 - Comprendre i usar el llenguatge dels sistemes dinàmics.
 - Conèixer demostracions d'alguns dels seus resultats.
 - Conèixer la utilitat de la simbiosi qualitatiu-quantitatiu i també les seves limitacions.
 - Conèixer i entendre les eines de la teoria qualitativa de equacions diferencials.
 - Entendre la dificultat de predir el comportament de les òrbites de certs sistemes dinàmics mitjançant la noció de caos.
- Competències instrumentals
 - Fomentar la capacitat d'autoaprenentatge dels alumnes.
 - Comunicar, tant per escrit com de forma oral, coneixements, procediments e idees matemàtiques.
 - Usar eines de cerca de recursos bibliogràfics.
 - Usar aplicacions informàtiques si alguna part del curs així ho requereix.

Coneixements matemàtics previs

Els continguts de les assignatures *Models amb equacions diferencials* i *Equacions diferencials* de tercer curs de la titul·lació.

Continguts

1. Sistemes Dinàmics a espais Euclidianos.

Sistemes dinàmics definits per equacions diferencials i per difeomorfismes. Òrbites; punts crítics i òrbites periòdiques. Conjunts invariants i conjunts límit. Atractors. Estabilitat Liapunov. Conjugació de sistemes dinàmics.

2. Estudi de la dinàmica local, discreta i continua.

Punts regulars. Teorema del flux tubular. Punts crítics i punts fixos: Solucions dels sistemes lineals. Índex d'estabilitat. Classificació topològica dels sistemes lineals continus i discrets. Estabilitat; Funcions de Liapunov; Teorema de Hartman, de la varietat estable i de la varietat central. Òrbites periòdiques: Aplicació de Poincaré i estabilitat.

3. Dinàmica global en sistemes continus.

Equacions diferencials ordinàries a $\mathbb{R}^2$: Teorema de Poincaré-Bendixon, Teorema de Bendixon-Dulac, Existència i unicitat de cicles límit, Equació de Liénard. Equacions diferencials ordinàries en dimensió major que 2.

4. Dinàmica global en sistemes discrets.

Iteració en dimensió 1 i 2. Les aplicacions unimodals. Caos. El shift de Bernoulli. La ferradura de Smale.

Bibliografia bàsica

- R.L. DEVANEY, *An Introduction to chaotic dynamical systems*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1986.
- J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1993.
- L.H. ALVES MONTEIRO, *Sistemas Dinâmicos*, Mack Pesquisa, 2006.
- L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical systems*, Springer-Verlag, 1996.
- J. SOTOMAYOR, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projecto Euclides, Gráfica Editora Hamburg Ltda., 1979.
- E. H. STROGATZ, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview, 1994.

Metodologia de l'ensenyament

Aquesta assignatura té quatre hores a la setmana de classe presencials, en les hores de teoria el professor explicarà els continguts que acabem de detallar i en les de problemes seran els propis alumnes qui explicaran, tot sortint a la pissarra, els exercicis que els seran assignats.

Sistema d'avaluació de l'aprenentatge

L'avaluació consta de dues parts: un examen a final de curs que comptarà un 50 per cent i l'altre 50 per cent s'aconseguirà mitjançant el lliurament dels exercicis. Per tal d'aprovar l'assignatura s'han d'aprovar les dues parts per separat.

La puntuació de cada problema variarà de 0.5 a 2 punts segons la dificultat de resolució i s'hauran de fer un mínim de problemes per tal d'assolir una puntuació mínima (5) per aprovar. Aquestes problemes seran assignats pel professor de problemes i hauran de ser exposats a la sessió de problemes, a més, se n'haurà d'entregar la resolució per escrit (a mà o L^AT_EX) abans de la seva exposició. Es podrà obtenir més nota d'aquesta part, entregant per escrit més problemes, i es seguirà el mateix mètode de puntuació que pels obligatoris. Per a la correcció dels problemes es tindrà en compte tant l'exposició oral com la resolució escrita. L'assistència a la sessió de problemes és altament recomanada. Els problemes necessaris per aprovar es faran de manera individual mentre que els problemes per augmentar la nota de problemes es podran fer en parelles, tot i que, en aquest cas, la puntuació dependrà de la dificultat del problema.

Temps d'estudi personal que ha de dedicar un estudiant per a superar l'assignatura

- Hores presencials: 56 hores (14 setmanes a 4 hores per setmana).
- Hores no presencials:
 - Estudi de teoria: 35 hores (14 setmanes a 2.5 hores per setmana)
 - Preparació de l'examen: 24 hores (tres dies a 8 hores diàries)
 - Realització dels exercicis: 63 hores (14 setmanes a 4.5 hores per setmana)

Professors

Joan Torregrosa (torre@mat.uab.cat)

Despatx: C1/310.

Horari de consultes: dilluns de 11 a 13 i divendres de 10 a 12.

Antoni Ferragut (ferragut@mat.uab.cat)

Despatx: C1/-162.

Horari de consultes: dijous de 12 a 14.