

GUIA DOCENT D'INTRODUCCIÓ A L'ÀLGEBRA LINEAL

Curs 2007/2008

1. IDENTIFICACIÓ DE L'ASSIGNATURA

Nom: Introducció a l'Àlgebra Lineal

Codi: 27990

Crèdits: 15

Tipus: Obligatòria

2. OBJECTIUS

Els objectius d'aquesta assignatura són de dos tipus: assolir formació matemàtica i assolir coneixements i destreses propis de l'Àlgebra Lineal.

Entre els objectius de caire formatiu destaquem els següents: entendre i utilitzar correctament el llenguatge matemàtic, veure la necessitat de les demostracions i desenvolupar el sentit crític davant les afirmacions matemàtiques i, finalment, desenvolupar actituds combatives davant els problemes.

Els objectius propis del contingut els anirem detallant en la tercera part d'aquesta guia.

3. CONTINGUTS

L'assignatura està organitzada en tres parts :

- I. Sistemes d'equacions lineals i matrius.
- II. Espais vectorials i aplicacions lineals.
- III. Espais vectorials amb producte escalar.

El curs comença revisant la resolució de sistemes d'equacions lineals que l'alumne ja coneix de l'ensenyament secundari. Sistematitzarem el mètode de resolució, entenent què s'està fent a cada pas, i introduïrem el càlcul matricial com el llenguatge adequat per estudiar els sistemes d'equacions lineals. Els objectius d'aquesta primera part són aprendre a resoldre sistemes d'equacions lineals, utilitzar les eines del càlcul matricial i, tal com dèiem en la part anterior, que l'alumne es familiaritzi amb les demostracions i el llenguatge.

La segona part del curs és la més important. Es fa un salt d'abstracció en considerar l'estructura algebraica d'espai vectorial i les aplicacions entre ells (aplicacions lineals). Els conceptes de base i coordenades d'un vector permetran utilitzar les eines matricials dels capítols anteriors. Els objectius d'aquesta part són:

- i) Entendre els espais vectorials com estructura algebraica i geomètrica.
- ii) Entendre els conceptes de base i dimensió.
- iii) Aprendre a calcular amb coordenades, entenent bé la relació entre un vector i les seves coordenades i entre una aplicació lineal i les seves matrius associades.
- iv) Entendre què vol dir classificar un endomorfisme d'un espai vectorial.

En la tercera part del curs es tracta de veure la relació que hi ha entre l'àlgebra lineal i la geometria euclidiana i com la classificació de certs objectes algebraics permet distingir certs objectes geomètrics.

Programa

1- Sistemes d'equacions lineals i matrius

- Sistemes d'equacions lineals. Esglaonament d'un sistema d'equacions lineals.
- Matrius. Operacions amb matrius. Matriu inversa.
- Transformacions elementals per files i per columnes d'una matriu. Matrius elementals. Esglaonament i PAQ reducció. Rang d'una matriu. Càlcul de la inversa d'una matriu invertible.
- Teorema de Rouché-Frobenius. El mètode de Gauss.
- Determinant d'una matriu. Propietats. Fórmula de la inversa d'una matriu invertible. Fórmula de Cramer.

2- Espais vectorials

- Espai vectorial, definició i exemples. Subespai vectorial. Combinació lineal. Subespai vectorial generat per un conjunt de vectors.
- Independència lineal. Base d'un espai vectorial. Teorema de Steinitz. Teorema de la base. Dimensió d'un espai vectorial.
- Intersecció i suma de subespais vectorials. Fórmula de Grassmann.
- Espai vectorial quocient.

3- Aplicacions lineals

- Aplicacions lineals. Composició. Nucli i imatge d'una aplicació lineal. Teorema de l'isomorfisme. Construcció d'aplicacions lineals.
- Coordenades d'un vector respecte d'una base. Isomorfisme entre un espai vectorial i l'espai de coordenades respecte d'una base fixada.
- Matriu d'una aplicació lineal respecte d'una base de sortida i una base d'arribada. Isomorfisme entre l'espai vectorial de les aplicacions lineals entre dos espais vectorials de dimensions n i m i l'espai vectorial de les matrius $m \times n$. Matriu de la composició de dues aplicacions lineals.
- Fórmules del canvi de base.
- L'espai dual. Base dual. Aplicació dual d'una aplicació lineal

4- Classificació d'endomorfismes.

- L'àlgebra dels endomorfismes d'un espai vectorial. L'àlgebra de les matrius quadrades. Isomorfisme entre l'àlgebra d'endomorfismes d'un espai vectorial de dimensió n i l'àlgebra de les matrius quadrades $n \times n$.
- Diagonalització. Valors propis i vectors propis. Polinomi característic. Caracterització dels endomorfismes diagonalitzables.
- Polinomi mínim. Teorema de Cayley-Hamilton.
- Subespais invariants per un endomorfisme. Primer teorema de descomposició.
- Forma canònica de Jordan.

5- Espais vectorials amb producte escalar.

- Producte escalar estàndard de $\mathbb{R}^n$.
- Base ortonormal, mètode de Gram-Schmidt. Aplicacions ortogonals. Grup ortogonal.
- Els grups ortogonals $O(2)$ i $O(3)$.

4. TEMPS DE DEDICACIÓ DE L'ALUMNE.

TIPUS D'ACTIVITAT	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de Teoria	82
	Classes de Problemes	54
	Classes de Pràctiques	0
	Activitats Tutoritzades	36
	Realització de proves parcials	8
	Realització d'exàmens finals	8
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de teoria	60
	Realització de problemes	90
	Preparació de pràctiques	0
	Preparació de treballs	0
	Preparació d'exàmens	24

Cal tenir en compte que, tal i com s'explicarà a l'apartat de mètode, hi ha 36 hores d'activitats presencials tutoritzades en que l'alumne es troba en un aula fent exercicis de l'assignatura, tutelat per un professor. Així doncs aquestes hores corresponen també a hores d'estudi d'exercicis.

5. CAPACITATS O DESTRESES A ADQUIRIR

Teòriques

- Entendre els conceptes de sistema d'equacions lineals, matriu, matriu invertible, rang d'una matriu i determinant.
- Entendre els conceptes d'espai vectorial des d'un punt de vista geomètric i des d'un punt de vista algebraic. Entendre el concepte de base i dimensió, el teorema de la base i els seus corol·laris.
- Entendre el concepte d'espai vectorial quocient.
- Entendre els conceptes d'aplicació lineal i de nucli i imatge d'una aplicació lineal. Entendre el concepte d'isomorfisme i el teorema de l'isomorfisme entre espais vectorials.
- Entendre el concepte de coordenades d'un vector en una base i el de matriu d'una aplicació lineal en unes bases de sortida i d'arribada.
- Entendre el concepte d'espai dual.
- Entendre el concepte d'endomorfisme diagonalitzable i el teorema de diagonalització.
- Entendre els conceptes de forma canònica de Jordan i de base de Jordan d'un endomorfisme.
- Entendre el concepte de forma bilineal i la seva matriu respecte d'una base.
- Entendre els conceptes de producte escalar i espai vectorial euclidià. Entendre el concepte de base ortonormal d'un espai vectorial euclidià i de subespai ortogonal.
- Entendre el concepte d'aplicació que conserva el producte escalar i les seves propietats.

Pràctiques

- Saber resoldre sistemes d'equacions lineals pel mètode de Gauss. Tenir destresa en les operacions matricials i amb el càlcul de determinants.
- Saber decidir si un subconjunt d'un espai vectorial és subespai vectorial.
- Saber decidir si un conjunt de vectors és o no linealment independents.
- Saber extreure una base d'un conjunt de generadors d'un espai vectorial.
- Saber ampliar una família de vectors linealment independents a una base d'un espai vectorial.
- Saber calcular una base de la suma i de la intersecció de subespais vectorials partint de bases d'aquests.
- Saber calcular una base del nucli i de la imatge d'una aplicació lineal.
- Saber calcular la matriu d'una aplicació lineal respecte de bases donades.
- Saber calcular les coordenades d'un vector respecte d'una base donada.
- Saber usar les fórmules del canvi de base per resoldre diversos problemes d'àlgebra lineal.
- Saber calcular el polinomi característic d'un endomorfisme.
- Saber trobar els valors propis i vectors propis d'un endomorfisme.
- Saber decidir si un endomorfisme diagonalitza o no. En cas afirmatiu, saber trobar la forma diagonal i una base de vectors propis.
- Saber calcular el polinomi mínim d'un endomorfisme.
- Saber calcular, en cas que existeixi, la forma canònica de Jordan i una base de Jordan d'un endomorfisme.
- Saber calcular una base ortonormal d'un subespai vectorial d'un espai vectorial euclidià.

6. REQUISITS.

Encara que el curs serà força autocontingut es requerirà que l'alumne conegui la resolució de sistemes d'equacions lineals i l'aritmètica bàsica de números i de polinomis, i que tingui detresa de càlcul amb expressions algebraïques simbòliques. El requisit més important, però, és una gran curiositat per entendre profundament els temes que s'estudiaran.

7. METODOLOGIA.

Aquesta assignatura té tres hores setmanals de teoria, dues hores de problemes i 13 hores al quadrimestre de problemes dirigits, però, com en totes les assignatures de matemàtiques, per arribar-ne a assolir un bon coneixement el més important és el treball i l'esforç personal de l'alumne, i amb aquesta idea s'ha dissenyat la metodologia de les assignatures de primer curs.

Els alumnes disposaran de llibre de text i se'ls aconsella que es mirin els temes abans de la classe de teoria. El coneixement de les nocions introduïdes, els enunciat dels teoremes i les seves aplicacions són imprescindibles a l'hora de posar-se a atacar els problemes. Però també és bàsica la comprensió de les demostracions dels teoremes i proposicions per tal d'aprofundir en les nocions i de resoldre els problemes amb tècniques semblants. Durant l'explicació del professor o en hores de consulta els alumnes haurien de preguntar tots els dubtes que tinguin.

Setmanalment hi haurà una sessió de dues hores de problemes, que es completaran amb sessions de problemes dirigits. A l'aula, en les classes de problemes, especialment en les de problemes dirigits, els alumnes treballaran en grups els problemes proposats, preguntant al professor tantes vegades com

els sigui necessari, després el professor explicarà la resolució dels problemes més representatius de la llista. En aquest moment és bàsica la participació dels estudiants per contrastar la seva resolució amb la del professor i corregir-la si cal. És importantíssim que l'alumne s'hagi barallat a fons amb els problemes, i per tant, que preparin els exercicis abans d'anar a classe.

Durant el curs es proposaran exercicis per lliurar. Periòdicament, sobre els exercicis lliurats, es faran entrevistes personals amb l'alumne per tal d'orientar-lo en la resolució i en la manera d'exposar-la. Cal que l'estudiant es quedi una còpia dels exercicis lliurats per poder preparar l'entrevista amb antelació.

A més, l'assignatura disposa d'una pàgina al "campus virtual" on s'hi aniran penjant les llistes d'exercicis, material extra i qualsevol informació referent a l'assignatura.

A banda de tot això els alumnes disposaran d'unes hores de tutoria al despatx del professor de teoria i de problemes, on podran consultar dubtes i demanar tota mena d'ajuda en el seu treball.

8. Avaluació

Primera Convocatòria (Juliol)

- Un 25% de la nota correspon a l'avaluació continuada. Aquesta nota s'obté de:
 - l'entrega i correcció dels problemes,
 - les entrevistes en què es discutiran els problemes anteriorment lliurats i,
 - 2 proves d'una durada de dues hores.

D'aquí s'obtindrà una nota sobre 10 que anomenarem c

- L'altre 75% es farà amb notes d'examens. Aquesta nota es pot obtenir de 2 maneres

– Per parcials

Al final de cada semestre es farà un examen sobre la matèria d'aquell semestre. L'alumne obtindrà així dues notes p_1 i p_2 (sobre 10) del primer i del segon parcial respectivament.

Si un alumne té les notes $p_1 \geq 3$ i $p_2 \geq 3$, llavors la seva nota per parcials és

$$N_1 = 0.25 \cdot c + 0.35 \cdot p_1 + 0.4 \cdot p_2.$$

Si $N_1 \geq 5$, llavors l'alumne pot triar entre dues opcions:

- (a) Que N_1 sigui la seva nota a la convocatòria de juny.
- (b) Presentar-se a l'examen final per millorar aquesta nota. En aquest cas l'alumne obtindrà com a mínim la nota N_1 a la convocatòria de juliol.

– Per final

Després del segon parcial es farà un examen final de tota l'assignatura. Diguem j a la nota d'aquest examen i posem

$$N = 0.25 \cdot c + 0.75 \cdot j.$$

La nota de la convocatòria de juliol és:

$\max(N_1, N, 5)$ si $j \geq 5$ o $\max(N_1, N)$ si $j < 5$.

Nota: Si un alumne té la nota $N_1 < 5$ i no es presenta a l'examen final tindrà un "no presentat" a la convocatòria de juliol.

Segona Convocatòria (Setembre)

Hi haurà un examen global de tota l'assignatura. Aleshores la nota de la segona convocatòria s'obté seguint el mateix procés de la primera convocatòria (per final) substituint la nota de l'examen final de juliol (j) per la de l'examen de setembre (s).

9. Bibliografia

Llibre de text

F. CEDÓ I A. REVENTÓS Geometria Plana i Àlgebra Lineal *Manuals de la UAB*, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 2004

Bibliografia bàsica

L. MERINO I E. SANTOS Álgebra Lineal con Métodos Elementales, *Ed. Thomson, Madrid, 2006*

Altra bibliografia

M. CASTELLET I I. LLERENA Álgebra Lineal i Geometria *Manuals de la UAB*, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1988, (versió castellana per Ed. Reverté, Barcelona, 1991).

F. PUERTA Álgebra Lineal *UPC, Barcelona, 1986.*

Llibres de problemes

F. CEDÓ I V. GISIN Álgebra Bàsica *Manuals de la UAB*, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1997

J. GARCÍA LAPRESTA, M. PANERO, J. MARTÍNEZ, J. RINCÓN Y C. PALMERO Test de Álgebra lineal *Ed. AC, Madrid 1992*

J. ROJO Y I. MARTÍN Ejercicios y Problemas de Álgebra Lineal *Mc. Graw-Hill, Madrid, 1994*

10. Professorat

Berta Barquero
Problemes dirigits
CB/004
barquero@mat.uab.cat

Miquel Brustenga
Problemes (primer quadrimestre)
C1/-162
mbrusten@mat.uab.cat

Rosa Camps
Teoria
C1/120
rcamps@mat.uab.cat

Francesc Perera
Problemes (segon quadrimestre)
C1/210
perera@mat.uab.cat

Javier Sánchez
Problemes (primer quadrimestre)
C1/-132
jsanchez@mat.uab.cat