

# Àlgebra

## Presentació i objectius

L'objectiu d'aquesta assignatura és bàsicament arribar a presentar la teoria de Galois sobre resolubilitat d'equacions per radicals. Aquest problema, un dels més antics de l'història de les matemàtiques, té les seves arrels a l'antiguitat en temps dels Babilònics ( $\sim 1700$  AC) i culmina brillantment amb l'obra d'Evariste Galois (1811-1832) qui desenvolupà la teoria per a caracteritzar les equacions resolubles per radicals.

La presentació moderna de la teoria de Galois representa una part central de l'àlgebra ja que els mètodes d'abstracció que s'hi utilitzen ens mostren la potència de diverses eines algebraïques introduïdes anteriorment. Així doncs, la traducció del problema a la teoria de cossos i posteriorment a la teoria de grups ens permet desenvolupar aquestes branques aparentment llunyanes i entendre els lligams entre elles.

En aquest curs començarem per introduir el problema de la resolubilitat d'equacions per radicals en un context històric i els mètodes coneguts per a resoldre equacions de graus 2, 3 i 4. Posteriorment la teoria de cossos ens proporcionarà el marc formal adequat on plantejar el problema i presentar de manera clara la teoria de Galois d'equacions. Acabarem amb una aplicació de la teoria de cossos al problema clàssic de les construccions amb regla i compàs, que juntament amb la teoria de Galois ens permetrà obtenir una caracterització dels elements constructibles.

Una de les eines fonamentals per aquest curs és la teoria de grups i la seva introducció forçarà un parèntesi per tal de presentar les eines necessàries. En aquest cas, els grups resolubles posant un interès especial en el cas del grup de permutacions i la simplicitat del grup  $A_5$ , element clau per demostrar l'irresolubilitat de l'equació quintica general.

## Requisits previs

Aquesta assignatura requereix uns coneixements bàsics d'àlgebra lineal i àlgebra abstracta. En particular, cal entendre bé les nocions de divisibilitat i factorització a l'anell de polinomis, la construcció de l'anell quocient per un ideal, així com les nocions bàsiques de grups i la classificació de grups abelians finitament generats.

Aquests temes estan continguts en les assignatures Introducció a l'àlgebra lineal, Matemàtica discreta i Fonaments d'àlgebra de l'actual pla d'estudis de la titulació de Matemàtiques.

# Continguts

## 1. Introducció

Resolució d'equacions de grau 2, 3 i 4. El problema de la resolubilitat per radicals. Polinomis simètrics. Preliminars d'anells.

## 2. Extensions de cossos

Elements algebraics i elements transcendents. Extensions de morfismes. Adjuncció d'arrels. Cossos de descomposició. Clausura algebraica. Cossos finits. Extensions normals. Extensions separables. Cossos perfectes.

## 3. Fonaments de la teoria de Galois

El grup de Galois. La correspondència de Galois i extensions de Galois. Teorema d'Artin-Dedekind. Teorema fonamental de la teoria de Galois. El cas dels polinomis genèrics.

## 4. Teoria de Grups

Teoremes d'isomorfia. Grups resolubles. Grups de permutacions. Teorema de Cayley. Simplicitat d' $A_5$ . Grups de Sylow.

## 5. Teoria de Galois d'equacions

Arrels de la unitat i polinomis ciclotòmics. Extensions radicals i extensions cíclics. Teorema de Galois sobre resolubilitat per radicals. Equacions irresolubles per radicals.

## 6. Construccions amb regla i compàs

Problemes clàssics. Construcció de polígons regulars. Teorema de Gauss-Wantzel. Caracterització d'elements constructibles.

## Temps de dedicació de l'alumne.

TIPUS D'ACTIVITAT	Descripció	Hores
<b>ACTIVITATS PRESENCIALS</b>	Classes de Teoria	45
	Classes de Problemes	30
	Classes de Pràctiques	0
	Realització de proves parcials	0
	Realització d'exàmens parcials	2
	Realització d'exàmens finals	4
<b>ACTIVITATS NO PRESENCIALS</b>	Estudiar Teoria	45
	Fer exercicis de classe	30
	Preparar exercicis per entregar	8
	Preparar proves parcials	5
	Preparar exàmens finals	20

*Cal tenir en compte que, tal i com s'explicarà a l'apartat de mètode, hi ha 30 hores d'activitats presencials tutoritzades en que l'alumne es troba suposadament en un aula fent exercicis de l'assignatura. Així doncs aquestes hores corresponen també a hores d'estudi d'exercicis.*

## Capacitats o destreses a adquirir

### Destreses teòriques

- Entendre el problema clàssic de resolució d'equacions algebraiques per radicals, i conèixer els mètodes clàssics de resolució en graus 2, 3 i 4.
- Entendre el concepte d'extensió de cossos i saber diferenciar els exemples bàsics d'extensió algebraica i transcendent.
- Entendre la construcció de Kronecker d'adjunció d'arrels i la construcció del cos de descomposició d'un polinomi.
- Entendre les propietats bàsiques de les extensions normals i separables i la seva relació amb els automorfismes de cossos, així com el concepte de grup de Galois i el funcionament de la correspondència de Galois.
- Aprofundir en el coneixement dels grups. En concret, aprendre les nocions bàsiques de grups resolubles. Conèixer bé els grups de permutacions  $S_n$ , i saber usar les propietats dels grups de Sylow en l'estudi de la resolubilitat de grups.
- Entendre la relació de la teoria de Galois desenvolupada al curs, amb el problema de la resolubilitat d'equacions per radicals i conèixer exemples d'equacions irresolubles, entenent el significat profund d'això.
- Conèixer les aplicacions de la teoria de Galois als problemes clàssics de les construccions amb regla i compàs.

### Destreses Pràctiques

- Saber factoritzar polinomis a un cos arbitrari, i trobar polinomis irreductibles d'elements en una determinada extensió algebraica.
- Saber construir cossos finits i treballar amb ells amb agilitat.
- Saber treballar amb automorfismes d'extensions algebraiques usant les propietats usuals i el fet de que permuten arrels de polinomis.
- Saber construir el grup de Galois d'una extensió i usar això per estudiar-ne els cossos intermitjos.
- Poder decidir en alguns casos concrets, si un grup d'un ordre determinat és resoluble o no.

- Saber aplicar tècniques algebraiques per decidir si una construcció geomètrica amb regla i compàs és possible o no.

## Avaluació

La nota de la primera convocatòria (febrer de 2008) s'obtindrà a partir de la nota d'avaluació continuada i la nota d'un *examen final*. L'avaluació continuada consistirà en l'*entrega de problemes* i un *examen parcial* a mitjans de novembre. Tan els problemes per entregar com el dia i l'hora de l'examen parcial seran anunciats convenientment a classe i també a través del Campus Virtual. Si denotem per  $N_e$ ,  $N_p$  i  $N_f$  les notes obtingudes per entrega de problemes, examen parcial i examen final respectivament i puntuades entre 0 i 10, la nota final s'obté com

$$0.15N_e + 0.15N_p + 0.7N_f$$

Si un alumne no es presenta a l'examen final, li constarà un "No presentat".

La nota de la segona convocatòria (juliol de 2008) s'obtindrà a partir d'un únic examen.

## Bibliografia

Els llibres de text que engloben la majoria de temes presents en aquesta assignatura solen presentar-se com a cursos de teoria de Galois. A la bibliografia bàsica podreu trobar alguns dels exemples més representatius i que us poden ser de més utilitat com a llibres de consulta.

A la bibliografia complementaria trobareu algunes obres on consultar les qüestions més generals relatives als preliminars necessaris, una monografia enfocada a la vida i obra d'Evariste Galois i un parell de llibres de text també sobre teoria de Galois, però que col·loquem en aquest apartat ja que ofereixen un enfoc més fidel al desenvolupament original de la teoria que, tot i ser molt il·lustratius, s'allunyen dels objectius d'aquest curs.

### Bibliografia bàsica

- E. ARTIN *Teoría de Galois Ed. Vicens Vives* 1970
- P.M. COHN *Algebra Vol. 2 John Willey & Sons* 1977
- J. ROTMAN, *Galois Theory Springer-Verlag* 1990
- D.J.H. GARLING *A course in Galois Theory Cambridge Univ. Press* 1986
- I. STEWART *Galois Theory Chapman and Hall* 1973
- A.M. DE VIOLA PRIORI I J.E. VIOLA-PRIORI *Teoría de Cuerpos y Teoría de Galois Ed. Reverté* 2006

### Bibliografia complementària

- P.M. COHN *Algebra Vol. 1 (2ona Edició) John Willey & Sons* 1982
- H. EDWARDS *Galois Theory Springer-Verlag* 1984
- J.P. TIGNOL *Galois Theory of Algebraic Equations World Scientific* 2001
- E. GALOIS *Obra d'Evariste Galois, a cura d'Antoni Malet IEC* 1984

## Professorat

*Teoria:* Ramon Antoine, despatx C1/324, hores de consulta a convenir.

*Problemes:* Ferran Cedó, despatx C1/352, hores de consulta a convenir.