

1. Identificació de l'assignatura

Nom: Anells i grups

Codi: 28016

Crèdits: 6

Tipus: Optativa (Semestral)

2. Objectius de l'assignatura

Aquesta assignatura és una introducció a la Teoria d'Anells (associatius amb unitat) i mòduls. L'objectiu principal de l'assignatura és l'estudi dels anells semisimples i mòduls sobre aquests anells, després s'apliquen els resultats obtinguts a l'estudi de les representacions dels grups finits.

3. Continguts

- Àlgebres i anells de divisió. Anells de divisió de dimensió finita sobre el centre.
- Els Quaternions. El Teorema de Frobenius
- Anells i ideals. Mòduls. L'anell oposat.
- El Lema de Zorn. Submòduls maximals i submòduls minimalis.
- Bases i mòduls lliures.
- Morfismes i quocients. Teorema d'isomorfia. Tot mòdul és quocient d'un mòdul lliure.
- Submòduls del mòdul quocient. Mòduls simples.
- Sumes directes i productes arbitraris.
- L'anell d'endomorfismes d'un mòdul i el grup $\text{Hom}(M, N)$. El Lema de Schur.
- Homomorfismes entre sumes directes finites de mòduls.
- Suma directa interna de submòduls.
- El sòcol de un mòdul. Mòduls semisimples.
- Propietats de clausura dels mòduls semisimples.
- Els exemples d'anells semisimples.
- Els ideals i els mòduls sobre un producte finit d'anells.

- Caracterització dels anells semisimples.
- Els mòduls pensats com representacions. L'àlgebra de grup.
- El teorema de Maschke. Representacions irreductibles.
- El Teorema de Frobenius.
- Representacions irreductibles dels grups abelians finits.

4. Temps que ha de dedicar un alumne a l'assignatura

1. Activitats presencials

- Classes de Teoria: 26 hores
- Classes de Problemes: 13 hores
- Classes de Pràctiques: 0 hores
- Activitats tutoritzades: 0 hores
- Realització de proves parcials: 0 hores
- Realització d'examens finals: 8 hores

2. Activitats no presencials

- Estudi de Teoria: 26 hores
- Realització de problemes: 50 hores
- Preparació de pràctiques : 0 hores
- Preparació de treballs: 0 hores
- Preparació d'examens 25 hores

3. Total: 148 hores

5. Capacitats o destreses a adquirir

- Capacitats teòriques

- Coneixer exemples d'anells de divisió.
- Profunditzar en l'Àlgebra Lineal i estendre-la a espais vectorials sobre els anells de divisió.
- Conèixer les eines bàsiques de la teoria d'anells i mòduls: quocient, morfisme, suma directa interna i externa.
- Entendre el concepte de mòdul simple

- Entendre bé l'estructura dels anells semisimples i dels mòduls sobre aquests anells. Entendre que aquesta és una extensió de l'estructura dels espais vectorials.
- Entendre els teoremes d'estructura dels anells semisimples.
- Entendre la noció de representació d'un grup finit, i la relació amb la teoria de mòduls.
- Saber fer la traducció entre els conceptes de mòduls sobre l'àlgebra de grup i els corresponents conceptes de representacions del grup.
- Entendre el teorema de Maschke, i el significat dels invariants dels anells semisimples en el cas de l'àlgebra de grup sobre un grup finit.

- Capacitats pràctiques o de problemes

- Saber expressar correctament un raonament o un concepte matemàtic per escrit.
- Saber manipular conceptes abstractes de l'àlgebra lineal en el cas de cossos commutatius i en el cas d'anells de divisió.
- Entendre l'estructura de mòdul sobre el seu anell d'endomorfismes d'un espai vectorial.
- Conèixer bé l'estructura com a anell, d'un anell de matrius sobre un anell de divisió: reticle d'ideals dreta i reticle dels ideals esquerra.
- Saber aplicar el Lema de Zorn.
- Saber manipular les eines bàsiques de la teoria d'anells i mòduls: quocient, morfisme, suma directa interna i externa.
- Treballar alguns exemples especials d'anells i mòduls.
- Saber trobar les representacions irreductibles dels grups abelians finits i de grups finits petits.
- Saber quan es pot descompondre una representació finita d'un grup finit en suma de representacions irreductibles i, si es pot, fer-ho.
- Saber determinar, en el cas de grups commutatius o en exemples de cardinalitat petita, l'estructura de l'àlgebra de grup (o de la representació regular) sobre un grup finit.

6. Requisits

Per tal de superar l'assignatura l'alumne haurà d'entendre en profunditat l'Àlgebra Lineal. També és útil tenir un coneixement bàsic del llenguatge d'anells i mòduls, que al llarg del curs es veurà com una extensió de les idees de l'Àlgebra Lineal. De manera molt puntual, també es faran servir alguns fets elementals d'extensions de cossos.

Per tal de facilitar el treball en grups cal saber el Teorema d'Estructura dels grups abelians finitament generats, i tenir alguns coneixements generals sobre grups finits (el grup de permutacions, com poden ser els grups d'ordres petits).

7. Metodologia

L'assignatura disposa cada setmana, durant tot el primer semestre, de dues hores de teoria i una de problemes. Es recomana fortament l'assistència a aquestes sessions.

S'anirà donant al alumne llistes de problemes per pensar i que es discutiran a la sessió de problemes. S'anima molt als alumnes que siguin molt actius en aquestes sessions, i s'ofereix la possibilitat de completar-les donant problemes escrits al professor per ser corregits.

Si algun alumne té interès es posaran problemes especials per entregar.

8. Avaluació

El dia 5 de Febrer de 2008 (provisionalment) està convocat l'examen final de l'assignatura, en primera convocatòria i el dia 7 de Juliol (provisionalment) l'examen de la segona convocatòria.

La nota de l'assignatura serà la nota de l'examen que es pot augmentar fins a dos punts fent problemes. Es pot obtenir 1 punt amb problemes de classe i 1 punt amb un problema particular, aquests punts que es sumaran a la nota de l'examen sempre aquesta sigui més gran o igual que 4.

9. Bibliografia

Bàsica

William A. Adkins, Steven H. Weintraub, *Algebra. An Approach via Module Theory*, GTM 136, Springer-Verlag, 1992.

K. R. Goodearl and R. B. Warfield Jr., *An introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, London Mathematical Society, Student Texts **16**, 1989.

Complementària

Frank W. Anderson i Kent R. Fuller, *Rings and categories of modules*, 2nd. ed., GTM 13, Springer, New York, 1992.

T. Y. Lam, *A First course in noncommutative rings*, 2nd. ed., GTM 131, Springer, New York, 2001.

10. Professorat

Teoria i problemes: Dolors Herbera.

Correu electrònic: dolors@mat.uab.es; despatx al Departament de Matemàtiques C1/364.

Hores de consulta: dilluns 11-13 + a convenir.

Telèfon: 93 581 3250