GUIA DOCENT DE GEOMETRIA RIEMANNIANA: CURS 2007-08.

1.- Identificació de l'assignatura

Nom de l'assignatura: Geometria Riemanniana.
Codi: 28020.
Nombre de crèdits: 6. Tipus: Optativa (primer semestre).

2.- Objectiu de l'assignatura

Una *varietat de Riemann* és una varietat diferenciable de dimensió n provista d'un tensor g de rang 2 covariant, simètric i definit positiu que s'anomena tensor mètric. La geometria riemanniana és una generalització de la geometria intrínseca de les superfícies de l'espai euclidià en la qual les nocions de transport paral·lel, corba geodèsica i curvatura són fonamentals. La mètrica de Riemann en una varietat coincideix amb la mètrica euclidiana fins al primer ordre d'aproximació. La diferència entre les mètriques ve donada per la curvatura de Riemann que és una generalització multidimensional de la curvartura de Gauss d'una superfície.

En el fonaments de la geometria riemanniana trobem tres idees: l'existència de mètriques no euclidianes, la curvatura de Gauss i el concepte de varietat.

La geometria riemanniana juga un paper molt important tant en la descripció i classificació de les varietats diferenciables com en la formulació de la mecànica clàssica i la teoria general de la relativitat.

Durant el curs es treballaran conceptes fonamentals com els de connexió, curvatura i geodèsiques, sobretot en superfícies tant abstractes com immerses a $\mathbb{R}^3$. Es tractaran les varietats amb curvatura seccional constant i veurem el teorema de Gauss-Bonnet com a exemple de geometria riemanniana global. Veurem aquells resultats que relacionen la curvatura de les varietats amb la seva topologia.

3.- Continguts

- Introducció i preliminars.
  - Varietats diferenciables. Exemples. Tensors i formes diferencials. Varietats de Riemann.
- Connexions.
  - Connexions i derivació covariant. Connexions en varietats de Riemann: expressió local i transport paral·lel. Referència mòbil.
- Geodèsiques.
  - Geodèsiques. Primera fòrmula de variació. Aplicació exponencial. Lema de Gauss. Entorns normals. Teorema de Hopf-Rinow.
- Curvatures.
  - Tensor de curvatura. Curvatura seccional. Varietats planes. Camps de Jacobi. Teorema de Hadamard.

- Espais de curvatura constant.
  - Teorema de Cartan. Els models esfèric, euclidià i hiperbòlic.
- Teorema de Gauss-Bonet i aplicacions.

4.- Temps que ha de dedicar un alumne a l'assignatura

Tipus d'activitat	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de teoria	26
	Classes de problemes	12
	Classes de pràctiques	0
	Activitats tutoritzades	0
	Realització de proves parcials	0
	Realització d'examens finals	3
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de teoria	40
	Realització de problemes	40
	Preparació de pràctiques	0
	Preparació de treballs	0
	Preparació d'examens	30
	Total	151

5.- Capacitats o destreses a adquirir

Capacitats teòriques

- Entendre la noció de tensor mètric i varietat de Riemann.
- Entendre la dificultat de donar sentit a la noció de transport paral·lel que motiva la introducció del formalisme de les connexions.
- Conèixer els punts de vista cinemàtic i variacional de la noció de geodèsica.
- Conèixer la descripció local de les varietats de Riemann que dóna l'aplicació exponencial.
- Entendre la relació entre el tensor de curvatura i la noció més intuitiva de curvatura de Gauss.
- Entendre la curvatura com l'obstrucció a que la varietat sigui localment euclidiana.
- Conèixer els models de geometries de curvatura constant.
- Familiaritzar-se, mitjançant la comprensió i assimilació de determinats teoremes, amb els principis generals que relacionen la curvatura d'una varietat amb les seves propietats topològiques globals.

Capacitats pràctiques

- Adquirir pràctica en els càlculs senzills en varietats de Riemann concretes.

- Saber determinar les equacions del transport paral·lel i de les geodèsiques.
- Saber calcular el tensor de curvatura i les curvatures seccionals pel mètode de la referència mòbil.
- Adquirir destresa en la redacció formal de textos matemàtics per mitjà de la resolució de problemes.
- Adquirir experiència en la presentació oral de problemes.

6.- Requisits

Per a un bon seguiment de l'assignatura és indispensable que els estudiants hagin cursat les assignatures *Geometria Diferencial* així com *Geometria de Varietats.*

També es aconsellable tenir coneixements d'anàlisi (*Anàlisi Vectorial*), de topologia (*Topologia I* i *Topologia II*) i d'equacions diferencials (*Equacions Diferencials*).

7.- Metodologia

L'assignatura disposa de dues hores de classe de teoria i una de problemes. Es recomana fortament l'assistència tant a les classes de teoria com a les de problemes.

A les classes de teoria donarem les eines necessàries per a la comprensió i resolució de problemes. S'introduiran les nocions fonamentals de la geometria riemanniana i es presentaran els resultats més importants de la teoria.

A les classes de problemes s'aprofundirà en l'assimilació i millor comprensió dels conceptes desenvolupats a les classes teòriques mitjançant la resolució de problemes teòrics i d'exercicis destinats a incrementar la destresa dels alumnes en els càlculs propis de la matèria. Aquest treball es durà a terme mitjançant les explicacions fetes pel professor a la pissarra i la participació activa dels estudiants en la discussió dels diferents arguments emprats per tal de solucionar els problemes. Les llistes de problemes seran lliurades als alumnes al llarg del quadrimestre.

Periòdicament el professor proposarà als alumnes la resolució de determinats problemes. Es demanarà que les resolucions siguin correctes però també s'encoratja als alumnes a cuidar de manera especial la claredat i el rigor de la redacció.

Al final del curs l'alumne haurà rebut a les classes de teoria i problemes tota la informació necessària (tant els enunciats com les seves demostracions), per a afrontar una prova final. Per tant recomanem a l'estudiant que aprofiti aquests recursos.

Aquesta assignatura també oferirà recursos mitjançant el Campus Virtual. En aquest anirem penjant els enunciats de les llistes de problemes i altre material que pugui complementar les classes de teoria i problemes.

8.- Avaluació

L'avaluació d'aquesta assignatura es realitzarà en base a la resolució de problemes al llarg del curs (40 % de la nota final) i la realització d'una prova final (60 % de la nota final).

9.- Bibliografia

1. Manfredo P. do Carmo, *Riemannian Geometry.* Birkhäuser, 1992.
2. Manfredo P. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superfícies.* Alianza Universidad, 1990.(o Birkhäuser, 1992.)
3. S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry.*Springer-Verlag, 1990.
4. Joan Girbau, *Geometria diferencial i relativitat.* Publicacions de la U.A.B., 1993.
5. John M. Lee *Riemannian Manifolds: an introduction to curvature.*Springer-Verlag, 1997.
6. M. Spivak *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Publish or Perish Inc, 1979.

Els llibres 1, 4 i 5 són referències bàsiques de la Geometria Riemanniana, especialment el llibre 1 que serà seguit molt d'aprop al llarg del curs. El llibre 3 és de nivell més avançat. El llibre 6 és una obra molt exhaustiva que pot ser un complement força útil per l'alumne.

10.- Professorat

Natàlia Castellana	Eva Miranda
Teoria	Problemes
C1/322	C1/-130
`natalia@mat.uab.es`	`miranda@mat.uab.es`
935814547	935812534
Consultes: Dilluns 12-13, i Dimarts 15-16	Consultes: Dijous 3-5