

GUIA DOCENT D'ÀLGEBRA LINEAL

Curs 2008/2009

1. IDENTIFICACIÓ DE L'ASSIGNATURA

Nom: Àlgebra Lineal
Codi: 100088
Crèdits: 12
Tipus: Formació Bàsica

2. OBJECTIUS

Els objectius d'aquesta assignatura són de dos tipus: assolir formació Matemàtica bàsica i assolir coneixements i destreses propis de l'Àlgebra Lineal.

Entre els objectius de caire formatiu destaquem els següents: entendre i utilitzar correctament el llenguatge matemàtic, veure la necessitat de les demostracions i desenvolupar el sentit crític davant les afirmacions matemàtiques i, finalment, desenvolupar actituds combatives davant els problemes.

3. CONTINGUTS

L'assignatura està organitzada en quatre parts :

I. Matrius i determinants.

- Operacions amb matrius.
- Canvis elementals i matrius elementals.
- Els teoremes: PAQ -reducció, rang d'una matriu i matrius invertibles.
- Sistemes d'equacions lineals: Teorema de Rouché Frobenius.
- Determinants i canvis elementals. Càlcul de determinants.
- Càlcul d'inverses i sistemes d'equacions lineals des del punt de vista dels determinants.

II. Espais vectorials

- Conceptes bàsics: cos i espai vectorial sobre un cos. Exemples.
- Espai vectorial finitament generat: Dependència e independència lineal.
- Bases, dimensió i coordenades. Teorema de Steinitz.
- Suma e intersecció de subespais. Fórmula de Grassmann. Suma directa de subespais.
- Espai quocient.

III. Aplicacions lineals.

1. Morfismes d'espais vectorials.
 - Les aplicacions que conserven la estructura d'espai vectorial: aplicacions lineals.
 - Nucli i imatge d'una aplicació lineal. Injectivitat i exhaustivitat.
 - Teoremes d'isomorfia.
 - Matriu associada a una aplicació lineal.
 - Canvi de coordenades i canvi de Base.
2. Espai dual.
3. Formes canòniques d'endomorfismes
 - Diagonalització

- Forma de Jordan

IV. Formes bilineals simètriques.

- Matriu associada a una forma bilineal.
- Bases ortogonals per formes bilineals simètriques. Teorema de Sylvester.
- Descomposicions ortogonals. Projeccions.
- Productes escalars.
- El Teorema Espectral.

En el curs es desenvolupen les tècniques per resoldre tres problemes que tenen en comú poder escriure's en llenguatge matricial:

- Resoldre sistemes d'equacions lineals, tema que l'alumne ja conèix de la secundària.
- Determinar fórmules tancades pels components de les potències d'una matriu quadrada.
- Determinar formes canòniques per certs tipus de polinomis de grau 2 en varies variables els *polinomis de grau 2 homogenis*.

Els sistemes d'equacions lineals es tracten en detall en la primera part del curs. Aquests i altres tècniques de càlcul matricial, que es desenvolupen en aquesta part, seran una eina fonamental al llarg del curs per atacar gairebé tots els problemes de càlcul que es plantejaran.

En la segona part del curs s'introdueixen els espais vectorials: la estructura algebraica abstracta associada als tres problemes mencionats anteriorment.

Les aplicacions lineals, que s'estudien a la tercera part del curs, són les aplicacions entre els espais vectorials que conserven aquesta estructura. Al pendre coordenades, veurem que aquestes aplicacions són *essencialment les que venen donades per fer producte per una matriu*. Això ens permet re-entendre els sistemes d'equacions lineals i abordar el càlcul de potències d'una matriu en termes d'aplicacions lineals. Els temes de diagonalització i forma canònica de Jordan continguts en aquesta part són, sens dubte, els més importants del curs, i en ells s'utilitzaran totes les eines desenvolupades.

Tots els objectes que s'introdueixen al llarg del curs tenen un profund significat geomètric. Això es fa encara més patent en la última part del curs on s'introdueixen un altre tipus d'aplicacions entre espais vectorials: les formes bilineals. Que permeten veure una matriu (simètriques) com una manera de donar una *geometria mètrica* a un espai vectorial.

4. TEMPS DE DEDICACIÓ DE L'ALUMNE.

TIPUS D'ACTIVITAT	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de Teoria	56
	Classes de Problemes	28
	Classes de Pràctiques	0
	Activitats Tutoritzades	28
	Realització de proves parcials	10
	Realització d'exàmens finals	4
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de teoria	60
	Realització de problemes	90
	Preparació de pràctiques	0
	Preparació de treballs	0
	Preparació d'exàmens	24

5. CAPACITATS O DESTRESES A ADQUIRIR

En general, per adquirir una bona formació matemàtica és essencial entendre a fons la Teoria de l'Àlgebra Lineal. Cal aprendre a manipular els conceptes que s'introdueixen al curs perquè s'usen no només en totes les branques de la matemàtica sino també en la informàtica i en la física.

Teòriques

- Entendre els conceptes de sistema d'equacions lineals, matriu, matriu invertible, rang d'una matriu i determinant.
- Entendre i usar la relació entre canvi elemental i matriu elemental.
- Entendre els conceptes d'espai vectorial des d'un punt de vista geomètric i des d'un punt de vista algebraic. Entendre el concepte de base i dimensió, el teorema de la base i els seus corollaris.
- Entendre el concepte d'espai vectorial quocient.
- Entendre i usar els conceptes d'aplicació lineal i de nucli i imatge d'una aplicació lineal. Entendre el concepte d'isomorfisme i el teorema de l'isomorfisme entre espais vectorials. Saber aplicar-los.
- Entendre el concepte de coordenades d'un vector en una base i el de matriu d'una aplicació lineal en unes bases de sortida i d'arribada.
- Entendre el concepte d'espai dual.
- Entendre el concepte d'endomorfisme diagonalitzable i el teorema de diagonalització.
- Entendre els conceptes de forma canònica de Jordan i de base de Jordan d'un endomorfisme.
- Entendre el concepte de forma bilineal i la seva matriu respecte d'una base.
- Entendre el concepte de base ortogonal d'un espai vectorial amb una forma bilineal simètrica.
- Entendre el concepte d'aplicació que conserva el producte escalar i les seves propietats.

Pràctiques

- Saber resoldre sistemes d'equacions lineals pel mètode de Gauss. Tenir destresa en les operacions matricials i amb el càlcul de determinants. Saber descomposar una matriu invertible en producte de matrius elementals.
- Saber decidir si un subconjunt d'un espai vectorial és subespai vectorial.
- Saber decidir si un conjunt de vectors és o no linealment independent.
- Saber extreure una base d'un conjunt de generadors d'un espai vectorial.
- Saber ampliar una família de vectors linealment independents a una base d'un espai vectorial.
- Saber calcular una base de la suma i de la intersecció de subespais vectorials partint de bases d'aquests.
- Saber calcular una base del nucli i de la imatge d'una aplicació lineal.
- Saber calcular la matriu d'una aplicació lineal respecte de bases donades.
- Saber calcular les coordenades d'un vector respecte d'una base donada.
- Saber usar les fórmules del canvi de base per resoldre diversos problemes d'àlgebra lineal.
- Saber calcular el polinomi característic d'un endomorfisme.

- Saber trobar els valors propis i vectors propis d'un endomorfisme.
- Saber decidir si un endomorfisme diagonalitza o no. En cas afirmatiu, saber trobar la forma diagonal i una base de vectors propis.
- Saber calcular el polinomi mínim d'un endomorfisme.
- Saber calcular, en cas que existeixi, la forma canònica de Jordan i una base de Jordan d'un endomorfisme.
- Saber calcular una base ortogonal d'un espai vectorial amb una forma bilineal simètrica.

6. REQUISITS.

Encara que el curs serà força autocontingut es requerirà que l'alumne conegui la resolució de sistemes d'equacions lineals i l'aritmètica bàsica de números i de polinomis, i que tingui detresa de càlcul amb expressions algebraiques simbòliques. El requisit més important, però, és una gran curiositat per entendre profundament els temes que s'estudiaran.

7. METODOLOGIA.

Aquesta assignatura té dues hores setmanals de teoria, una hora setmanal de problemes i 2 hores de seminari cada dues setmanes, però, com en totes les assignatures de matemàtiques, per arribar-ne a assolir un bon coneixement el més important és el treball i l'esforç personal de l'alumne, i amb aquesta idea s'ha dissenyat la metodologia de les assignatures de primer curs.

El coneixement de les nocions introduïdes a teoria, els enuncis dels teoremes i les seves aplicacions són imprescindibles a l'hora de posar-se a atacar els problemes. Però també és bàsica la comprensió de les demostracions dels teoremes i proposicions per tal d'aprofundir en les nocions i de resoldre els problemes amb tècniques semblants. Durant l'explicació del professor o en hores de consulta els alumnes haurien de preguntar tots els dubtes que tinguin.

Setmanalment hi haurà una sessió de una hora de **problemes**. On s'explicar la resolució dels problemes de les llistes que s'aniran lliurant periòdicament. És importantíssim que l'alumne s'hagi barallat a fons amb els problemes, i per tant, que **preparin els exercicis abans d'anar a classe** per poder contrastar les seves idees amb les dels companys i amb les del professor.

Periodicament, a la classe de problemes es proposaran exercicis per fer de manera individual a la classe i lliurar-los al professor al final de la classe. Aquests exercicis es tornaran corregits als alumnes.

Durant el curs es proposaran exercicis per lliurar. Periòdicament, sobre els exercicis lliurats, es faran entrevistes personals amb l'alumne per tal d'orientar-lo en la resolució i en la manera d'exposar-la. Cal que l'estudiant es quedi una còpia dels exercicis lliurats per poder preparar l'entrevista amb antelació.

Els **seminaris** completen i complementen tant les sessions de teoria com les de problemes. En cada sessió es proposa una llista d'exercicis per resoldre que tracta a fons alguna tècnica o idea especialment important del curs. Els problemes proposats, normalment estaran basats en la llista de problemes habitual o en la llista de problemes per lliurar. A l'aula en els seminaris, els alumnes treballaran en grups els problemes proposats, preguntant al professor tantes vegades com els sigui necessari, després el professor explicarà la resolució dels problemes més representatius de la llista. En aquest moment és bàsica la participació dels estudiants per contrastar la seva resolució amb la del professor i corregir-la si cal.

A més, l'assignatura disposa d'una pàgina al "campus virtual" on s'hi aniran penjant les llistes d'exercicis, material extra i qualsevol informació referent a l'assignatura.

A banda de tot això els alumnes disposaran d'unes **hores de tutoria** al despatx dels professor de teoria, de problemes i de seminaris, on podran consultar dubtes i demanar tota mena d'ajuda en el seu treball.

8. Avaluació

L'assignatura té una única convocatòria que es tanca al Juliol.

- Un 25% de la nota correspon a l'**avaluació continuada**. Aquesta nota s'obté a partir de l'entrega i correcció de problemes. Al llarg del curs així es farà de dues maneres:

1. periòdicament a la classe de problemes o als seminaris es proposarà algun exercici per fer a la classe que serà corregit amb detall i retornat al alumne. Aquests problemes seran essencialment de càlcul mecànic i similars als de les llistes de problemes.
2. l'entrega i correcció de problemes de llistes especials que es lliuraran als alumnes, i que seran discutits en entrevistes. Es faran dues d'aquestes entregues per semestre. El tipus de problema que es plantejarà en aquestes llistes vol fer reflexionar en profunditat sobre les tècniques i les idees d'una part del curs.

D'aquí s'obté una nota sobre 10 que anomenarem c

- L'altre 75% per cent de la nota correspon als **examens**.

– Cada semestre es realitzarà:

- A mig semestre es farà una *prova curta* a la classe de teoria d'una hora de durada. Sigui t_1 la nota, sobre 10, obtinguda a la primera prova, i sigui t_2 la nota, sobre 10, de la segona prova.
- Al final de cada semestre es farà un *examen parcial* sobre la matèria d'aquell semestre. Sigui p_1 la nota, sobre 10 del primer parcial, i sigui p_2 la nota, sobre 10, del segon parcial.

Així cada semestre s'obté una nota d'exàmens e_i , on

$$e_i = \max(p_i, 0.2 \cdot t_i + 0.8 \cdot p_i)$$

on $i = 1, 2$.

La nota **per parcials** de l'assignatura serà

$$N_1 = 0.25 \cdot c + 0.35 \cdot e_1 + 0.4 \cdot e_2.$$

Si $N_1 \geq 5$, llavors l'alumne pot triar entre dues opcions:

- (a) Que N_1 sigui la seva nota de l'assignatura.
- (b) Presentar-se a l'examen final per millorar aquesta nota. En aquest cas l'alumne obtindrà com a mínim la nota N_1 .

La nota **amb l'examen final** de l'assignatura és

Després del segon parcial es farà un examen final de tota l'assignatura. Diguem j a la nota d'aquest examen i posem

$$N = 0.25 \cdot c + 0.75 \cdot j.$$

La nota final de l'assignatura és: $\max(N_1, N)$

Nota: Es considerarà que un alumne/a s'ha presentat a l'assignatura, i per tant té una nota final, si fa un cinquanta per cent de l'avaluació continuada i dels examens semestrals o fa l'examen final.

9. Bibliografia

És important l'ús de bibliografia per completar tant la teoria com els problemes.

Hi ha una gran quantitat de textos d'Àlgebra Lineal de nivells molt diversos. Una selecció de textos que poden ser útils en aquest curs són:

Bibliografia bàsica

F. CEDÓ I A. REVENTÓS Geometria Plana i Àlgebra Lineal *Manuale de la UAB*, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 2004

Altra bibliografia

M. CASTELLET I I. LLERENA Àlgebra Lineal i Geometria *Manuale de la UAB*, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1988, (versió castellana per Ed. Reverté, Barcelona, 1991).

F. CEDÓ I D. HERBERA Àlgebra Lineal i Geometria per a físics Notes que es deixaran al Campus Virtual

A. KOSTRIKIN AND Y. MANIN Linear Algebra and Geometry *Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam 1989. (Segona edició: 1997)*

L. MERINO I E. SANTOS Álgebra Lineal con Métodos Elementales, Ed. Thomson, Madrid, 2006

F. PUERTA Álgebra Lineal UPC, Barcelona, 1986.

Llibres de problemes

F. CEDÓ I V. GISIN Àlgebra Bàsica *Manuale de la UAB*, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1997

J. GARCÍA LAPRESTA, M. PANERO, J. MARTÍNEZ, J. RINCÓN Y C. PALMERO Test de Álgebra lineal Ed. AC, Madrid 1992

J. ROJO Y I. MARTÍN Ejercicios y Problemas de Álgebra Lineal Mc. Graw-Hill, Madrid, 1994

10. Professorat

Dolors Herbera
Teoria
C1/364, 935813250
dolores@mat.uab.es

Miquel Brustenga
Problemes (primer semestre)
C1/-162, 935812912
mbrusten@mat.uab.cat

Ramon Antoine
Problemes (segon semestre)
C1/324, 935811395
ramon@mat.uab.cat

Ferran Cedó
Seminari
C1/352, 935814156
cedo@mat.uab.es

Dolors Herbera
Seminari

Wolfgang Pitsch
Seminari
C1/220, 935814544
pitsch@mat.uab.es