

GRAU EN MATEMÀTIQUES

GUIA DOCENT D'ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES

1.- Identificació de l'assignatura

Nom de l'assignatura: Estructures algebraiques

Codi: 100096

ECTS: 9

Tipus: Obligatòria (Semestral)

2.- Objectius de l'assignatura.

L'objectiu principal d'aquesta assignatura és donar una introducció a les estructures algebraiques bàsiques, com són els grups, els anells commutatius i els cossos. Farem èmfasi a conèixer diverses classes d'anells commutatius, estudiarem exemples no trivials d'anells, així com procediments per fabricar-ne de nous. Les classes d'anells que estudiarem apareixen de manera natural en considerar la teoria de divisibilitat. A la part final del curs s'introdueix l'estudi dels cossos i les seves extensions, centrant-nos en el cas dels cossos finits.

3.- Continguts.

1. Grups
 - Grups, subgrups, homomorfismes.
 - Teorema de Lagrange.
 - Subgrups normals. Grup quocient.
 - Els teoremes d'isomorfisme.
 - Acció d'un grup sobre un conjunt.
 - El primer teorema de Sylow.
2. Anells commutatius
 - Anells, ideals, anell quocient, ideals principals.
 - Els teoremes d'isomorfisme (per anells).
 - Ideals maximals i primers. El lema de Zorn.
 - El cos de fraccions d'un domini.
 - L'anell de polinomis.
3. Factorització
 - Dominis euclidians.
 - Màxim comú divisor. Algorisme d'Euclides. Dominis d'ideals principals.
 - Irreductibles, primers i factorització única.
 - Tot domini d'ideals principals és un domini de factorització única.
 - Factorització en anells de polinomis. El criteri d'Eisenstein.
4. Cossos finits
 - Cossos, característica, subcossos.
 - Teorema de l'element primitiu per cossos finits.
 - Existència i unicitat de cossos finits.
 - El morfisme de Frobenius.

4.- Temps que ha de dedicar l'alumne per tal de superar l'assignatura.

El temps previst en la taula següent és aproximat i, evidentment, cada estudiant l'haurà d'adaptar a la seva situació. En qualsevol cas, tenint en compte que a més aquesta assignatura compta 9 crèdits, és a dir el 30% dels crèdits d'un semestre estàndard, cal pensar com aconsellable una dedicació aproximada de 12-14 hores setmanals, incloent les classes presencials.

TIPUS D'ACTIVITAT	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de teoria	41
	Classes de problemes	16
	Seminaris	14
	Realització de proves parcials	2
	Realització d'exàmens finals	4
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de teoria	24
	Realització de problemes	48
	Recerca bibliogràfica	8
	Treballs en grup	35
	Preparació d'exàmens	30
	TOTAL	222

5.- Capacitats o destreses a adquirir.

Capacitats teòriques:

- Entendre les nocions de grup, anell i cos, i les nocions de morfisme corresponents a cada tipus d'estructura.
- Entendre la noció de subgrup, així com la de subgrup normal i la necessitat d'aquesta segona per tal de poder definir grup quocient i morfisme de pas al quocient.
- Conèixer els teoremes d'isomorfisme per a grups i les seves demostracions.
- Entendre la noció de sistema de generadors d'un grup, el concepte de grup finitament generat i cíclic.
- Entendre la noció d'acció d'un grup en un conjunt, i les nocions d'òrbita, conjunt invariant i estabilitzador.
- Entendre la noció de subanell i la d'ideal. Entendre per què l'estructura d'ideals és una mesura de la complexitat de l'anell.
- Entendre la noció d'element invertible o unitat d'un anell i la de divisor de zero.
- Entendre el concepte de domini i saber distingir, en exemples, els anells que són dominis dels que no ho són.
- Entendre les construccions bàsiques de suma i intersecció d'ideals. En particular, entendre la noció d'ideal principal.
- Entendre les nocions de nucli i imatge d'un morfisme d'anells, així com la construcció de l'anell quocient.
- Conèixer els teoremes d'isomorfisme per anells i les seves demostracions.
- Entendre el concepte d'ideal maximal i primer, i les diferències entre aquests.
- Entendre el lema de Zorn i la demostració del teorema de Krull d'existència d'ideals maximals.
- Entendre la construcció del cos de fraccions d'un domini i com aquesta és una generalització de la construcció dels racionals a partir dels enters.
- Entendre la construcció abstracta de l'anell de polinomis i la propietat de substitució.
- Entendre els conceptes de domini euclidià, domini d'ideals principals i domini factorial com a formalitzacions que comprenen l'anell dels enters i el de polinomis sobre un cos.

- Entendre la noció de màxim comú divisor i mínim comú múltiple i la seva falta d'unicitat. Entendre la relació d'equivalència "ésser associat".
- Conèixer la prova que tot domini euclidià és principal i exemples que mostren que el recíproc no és cert.
- Entendre les nocions d'element irreductible i primer, com a formalitzacions que generalitzen propietats importants en nombres enters i polinomis. Conèixer exemples on els conceptes no coincideixen.
- Conèixer la demostració que tot domini principal és factorial i exemples que mostren que el recíproc no és cert.
- Conèixer el lema de Gauss i la seva demostració.
- Entendre la relació entre els polinomis irreductibles de l'anell de polinomis $R[x]$ i els irreductibles a $K[x]$, on K és el cos de fraccions de R .
- Conèixer el teorema de Gauss i la seva demostració.
- Conèixer el criteri d'Eisenstein.
- Entendre les nocions de característica i subcòs primer d'un cos.
- Conèixer el teorema de l'element primitiu per cossos finits i la seva demostració.
- Entendre la construcció del cos de descomposició d'un polinomi a coeficients en un cos finit.
- Conèixer els teoremes d'existència i unicitat per als cossos finits, i les seves demostracions.
- Entendre la noció de morfisme de Frobenius per cossos de característica p , i conèixer el seu ús en l'estudi de cossos de descomposició i polinomis irreductibles sobre cossos finits.

Capacitats pràctiques o de problemes:

- Manipular amb destresa els diferents conceptes que apareixeran durant el curs, per tal de poder-los aplicar en la resolució de problemes.
- Sintetitzar les demostracions més significatives per aplicar-les a la resolució de problemes de caire teòric i pràctic.
- Adquirir la capacitat de desenvolupar certes variacions en determinades construccions per tal de manipular-les i deduir-ne propietats.
- Augmentar el catàleg d'exemples de grups i anells per tal de contrastar propietats. Més precisament:
- Comprovar amb exemples concrets d'anells els matisos entre els conceptes, veient per exemple DIP's no euclidians, de DFU's no principals, etc.
- Saber determinar si una determinada aplicació entre estructures és morfisme (de grups, d'anells, de cossos).
- Saber determinar si un subconjunt d'un grup (resp. anell, cos) és subgrup (resp. subanell o ideal, subcòs).
- Saber determinar els ideals d'anells senzills concrets.
- Saber calcular el cos de fraccions d'un domini en casos concrets.
- Saber treballar amb la norma euclidiana per fer càlculs concrets en DE's.
- Aplicar l'algorisme d'Euclides pels dominis euclidians.
- Adquirir familiaritat en la manipulació algebraica dels anells de polinomis.
- Utilitzar el criteri d'Eisenstein per decidir si un determinat polinomi és irreductible.
- Adquirir familiaritat en la manipulació algebraica de quocients d'anells de polinomis amb coeficients a $\mathbb{Z}/(p)$ i més en general a cossos finits.
- Saber determinar en casos concrets la irreductibilitat de polinomis amb coeficients a cossos finits.
- Saber determinar el polinomi irreductible sobre $\mathbb{Z}/(p)$ d'un element d'un cos de característica p .

6.- Requisits previs.

Els requisits acadèmics previs els trobarem en les assignatures *Fonaments de les Matemàtiques* i *Àlgebra Lineal*, de primer curs. L'habilitat adquirida en aquestes assignatures a nivell d'aritmètica i manipulació algebraica de determinats conceptes es continuarà desenvolupant, tot passant a un nivell d'abstracció més elevat, que per altra banda és molt comú en Matemàtiques.

7.- Metodologia.

Aquesta assignatura té tres hores setmanals de teoria, per a les quals, encara que no disposarem d'un conjunt d'apunts previs, cal destacar que hi ha una varietat interessant de referències bibliogràfiques que es poden tenir en compte per entendre el que s'ha explicat a classe i, si s'escau, ampliar coneixements.

Al llarg del curs es faran 14 sessions dedicades a resoldre problemes. Els conceptes introduïts a classe de teoria, els enunciats dels teoremes, les seves demostracions i les aplicacions són imprescindibles quan ens posem a pensar problemes, ja que a vegades les tècniques seran semblants. Els dubtes que sorgeixin es poden preguntar durant la classe o utilitzant els seminaris i les hores de consulta dels professors. Les llistes de problemes seran exhaustives i no s'acabaran a classe, de manera que els estudiants hauran d'acabar-les pel seu compte.

També es faran 14 sessions de seminari, on es treballaran alguns problemes llargs i projectes d'ampliació d'equip amb la supervisió del professorat; les dues últimes sessions de seminari es reserven per exposar els projectes d'ampliació.

A més, l'assignatura disposa d'una pàgina al "campus virtual" on anirem penjant les llistes de problemes, material addicional i qualsevol informació relacionada amb l'assignatura.

8.- Avaluació.

- Un 25% de la nota correspon a la tasca realitzada en els seminaris, incloent l'entrega de problemes i el projecte d'ampliació en grup. La qualificació obtinguda (**AC**) valorarà la correcció matemàtica del text que es lliuri així com la claredat de l'exposició oral.
- Es realitzaran dues proves escrites per avaluar les capacitats teòriques de l'assignatura, dins l'horari habitual de la classe de teoria, en dates que s'anunciaran oportunament. Les notes (**TE₁** i **TE₂**) d'aquestes proves correspondran conjuntament a un 15% de la nota.
- Un 60% de la nota correspon a l'obtinguda en l'examen final que es realitzarà durant el mes de juny. En aquest examen s'avaluaran les capacitats pràctiques o de problemes de l'assignatura.
- Si denotem per **PB** la qualificació obtinguda en aquest examen, la qualificació final que obtindrà l'alumne serà $0.25 \cdot AC + 0.15 \cdot (TE_1 + TE_2) / 2 + 0.6 \cdot PB$, amb la condició que per aprovar l'assignatura es requerirà haver obtingut una qualificació mínima de 4 a l'examen del mes de juny.
- Si un alumne no aprova l'assignatura al juny, al juliol es realitzarà un altre examen de recuperació on l'estudiant podrà recuperar la part de l'avaluació corresponent als exàmens (tant de teoria com de problemes).
- Denotant **R** la qualificació obtinguda en aquest examen, la qualificació final que obtindrà l'alumne serà llavors $0.25 \cdot AC + 0.75 \cdot R$, amb la condició que per aprovar l'assignatura es requerirà haver obtingut una qualificació mínima de 4 a l'examen del mes de juliol.

9.- Bibliografia.

Existeixen algunes monografies que cobreixen els continguts de l'assignatura. Recomanem, en aquest sentit, les referències [1] i [2] (encara que aquesta darrera conté alguns errors). Certs continguts més específics poden consultar-se a d'altres llibres. Per exemple, la part dedicada a grups es pot trobar a [8]. Els continguts dedicats a anells i mòduls poden trobar-se a [5].

Altres referències bibliogràfiques són [6] i [7], que també cobreixen els continguts de l'assignatura (i inclouen material més avançat), [4], on l'exposició és més esbossada, i [3], on es pot consultar algun material complementari.

[1] W. A. Adkins, S. H. Weintraub, "Algebra", Graduate Texts in Mathematics, 136, Springer-Verlag, 1992.

[2] R. Antoine, R. Camps, J. Moncasi, "Introducció a l'àlgebra abstracta", Manuals 46, Servei Publicacions UAB.

[3] P. M. Cohn, "Algebra", vol. 1, John Wiley and Sons, 1982/1991.

[4] P. M. Cohn, "Algebra", vol. 2, John Wiley and Sons, 1989.

[5] J. B. Fraleigh, "A First course in abstract algebra", Addison-Wesley, 1982.

[6] L. C. Grove, "Algebra", Academic Press, 1983.

[7] B. Hartley, T. O. Hawkes, "Rings, modules and linear algebra", Chapman and Hall, 1994 (reimpressió)

[8] N. Jacobson, "Basic Algebra I", W. H. Freeman, 1985.

[9] S. Lang, "Algebra", Graduate Texts in Mathematics, 211. *Springer-Verlag*, 1965/1984/2002

[10] M. A. Moreno, E. Pardo, "Teoría de grupos", Textos básicos universitarios, 14, Universidad de Cádiz, 2003.

10.- Professorat.

Teoria:

Joaquim Roé

C1/308

e-mail: jroe@mat.uab.cat

Problemes:

Francesc Perera

C1/210

e-mail: perera@mat.uab.cat

Seminaris:

Joaquim Roé

C1/308

e-mail: jroe@mat.uab.cat