

# Guia Docent de l'assignatura Geometria Diferencial

Curs 2008-2009

## 1. Identificació de l'assignatura

Nom i Codi	Geometria Diferencial 100107
Tipus	Obligatòria
Crèdits ECTS	12 (6 teòrics i 6 pràctics)
Curs	Segon semestre de tercer del grau de matemàtiques

Nom i Codi	Geometria Diferencial 28004
Tipus	Troncal
Crèdits	7.5 (4.5 teòrics i 3 pràctics)
Curs	Segon semestre de tercer de la llicenciatura de matemàtiques

Nom i Codi	Anàlisi vectorial 28001
Tipus	Obligatòria
Crèdits	6 (3 teòrics i 3 pràctics)
Curs	Segon semestre de tercer de la llicenciatura de matemàtiques

## 2. Presentació i objectius

Els conceptes i nocions de la geometria diferencial i del càlcul vectorial són bàsics per la comprensió de la realitat física que ens envolta. També són importants les seves aplicacions tècniques en el camp de l'enginyeria, on els objectes d'estudi es poden representar geomètricament per elements no lineals de l'espai tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , és a dir, bàsicament per corbes i superfícies.

L'objectiu principal és conèixer quines són les nocions geomètriques que permeten caracteritzar de manera teòrica la forma d'aquests elements (curvatura i torsió en el cas d'una corba, primera i segona forma fonamental en el cas d'una superfície), així com desenvolupar mètodes de càlcul de les seves característiques mètriques (longitud, àrea, etc). També és important relacionar els invariants associats a una corba continguda en una superfície amb les nocions i magnituds pròpies d'aquesta última. Aquestes propietats seran tractades en els dos primers blocs de l'assignatura.

En el tercer bloc del curs s'introduiran les nocions clàssiques del càlcul vectorial de  $\mathbb{R}^3$ : camps vectorials i les seves integrals de línia, superfície i volum així com els teoremes integrals de Green, Gauss i Stokes que les relacionen. També es tractaran en aquest punt alguns models de la física que utilitzen aquest llenguatge, com ara les equacions de Maxwell de l'electromagnetisme.

L'últim bloc del curs tracta de la formulació general del teorema de Stokes a  $\mathbb{R}^n$  utilitzant formes diferencials i les seves aplicacions a la geometria intrínseca de les superfícies. Un dels objectius d'aquest punt és provar el teorema de Gauss-Bonnet per a superfícies compactes.

### 3. Competències principals desenvolupades

En cursar i seguir de manera regular aquesta assignatura, l'alumne haurà assolit una sèrie de *competències específiques científiques*:

- Capacitat d'identificar objectes matemàtics nous i de relacionar-los amb d'altres de coneguts.
- Capacitat de reconèixer objectes de la realitat física que es poden representar geomètricament per elements matemàtiques de l'espai tridimensional.
- Proposar, analitzar, validar e interpretar models de situacions reals senzilles, utilitzant les eines matemàtiques més adients als objectius que es persegueixen.
- Capacitat de distingir, davant un problema, el que és important de cara a la seva resolució del que és merament anecdòtic.

També haurà assolit una sèrie de *competències específiques tecnològiques*. Més concretament, en finalitzar l'assignatura l'alumne hauria de ser capaç de:

- Trobar parametritzacions locals de corbes i superfícies de  $\mathbb{R}^3$ .
- Calcular la curvatura, torsió i triedre de Frenet d'una corba parametritzada.
- Calcular la primera i segona forma fonamental d'una superfície parametritzada.
- Aplicar amb correcció i seguretat els mètodes de càlcul de les característiques mètriques de corbes i superfícies. Calcular longitud, angles i àrees dins d'una superfície a partir de la primera forma fonamental.
- Calcular i interpretar geomètricament la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana d'una superfície.
- Calcular i interpretar geomètricament la curvatura normal i geodèsica d'una corba continguda en una superfície.
- Calcular les equacions de les geodèsiques d'una superfície i interpretar-les geomètricament i físicament.
- Saber plantejar i resoldre integrals de línia i de superfície.
- Aplicar les integrals de línia i de superfície per a reconèixer algunes propietats globals de corbes i superfícies.
- Comprendre les aplicacions del càlcul vectorial i de la geometria diferencial als problemes de la física.
- Utilitzar software científic per realitzar càlculs i visualitzar superfícies.

L'alumne també haurà treballat les següents *competències de tipus transversal*:

- Expressió correcta de forma escrita dels continguts de l'assignatura, tant teòrics com pràctics.
- Capacitat d'expressar-se oralment de manera correcta i eficient.
- Capacitat per a autogestionar el seu temps de treball i per a organitzar-se la feina buscant informació de manera autònoma.
- Capacitat de síntesi i de treball en grup.

## 4. Requisits previs

Per assimilar tots els continguts de l'assignatura s'ha de tenir un coneixement previ de càlcul en diverses variables (derivació, integració, teorema de la funció implícita), d'equacions diferencials (teorema d'existència i unicitat de solucions), d'àlgebra i geometria lineals (diagonalització d'endomorfismes autoadjunts, formes quadràtiques, còniques i quàdriques) i topologia (nocions de triangulació, característica d'Euler, superfície compacta i homeomorfisme).

## 5. Continguts

### 1. Corbes

1.1 Parametritzacions i longitud

1.2 Corbes planes

1.3 Corbes a l'espai

### 2. Superfícies

2.1 Parametritzacions i primera forma fonamental

2.2 Aplicació de Gauss i segona forma fonamental

2.3 Curvatures

2.4 Teorema Egregi de Gauss

### 3. Formulació clàssica del càlcul vectorial

3.1 Camps vectorials

3.2 Integrals de línia i de superfície

3.3 Teoremes integrals

3.4 Models de la física

### 4. Formes diferencials i teorema de Stokes

4.1 Formes diferencials

4.2 Teorema de Stokes

4.3 Mètode de la referència mòbil i teorema de Gauss-Bonnet

## 6. Metodologia

Cada setmana lectiva del curs es faran 3 sessions de 1 hora de *teoria*, 1 sessió de 1 hora de *problemes* i 1 sessió de 2 hores de *seminari*.

Com a norma general, a les classes de teoria primer s'introduiran els conceptes i després s'il·lustraran amb exemples abundants i alguns problemes típics.

Respecte de les classes de problemes, el primer que cal és que l'alumne *pensi* els problemes que se li proposen a les llistes de problemes. La situació ideal consisteix en anar a classe de problemes amb els problemes fets o estudiats en hores d'estudi. És poc útil observar com un altre persona fa els problemes, és com aprendre a tocar el piano veient com ho fa un altre! El professor de problemes anirà prenent nota dels problemes treballats per cada alumne amb anterioritat a la seva resolució a classe.

Les sessions de seminari estan principalment dedicades a desenvolupar alguns temes teòrics per part de l'alumne. La dinàmica que proposem és la següent. Abans de la realització de cada sessió de seminari els professors faran públic un guió en el qual figurin els objectius de la sessió

i una llista d'exercicis i observacions pautades a fi d'arribar-hi. Els alumnes l'hauran de llegir amb atenció i podran fer les cerques bibliogràfiques que considerin oportunes per tal de resoldre els exercicis proposats. Durant la sessió els professors poden resoldre dubtes puntuals però no fer exposicions magistrals. En finalitzar cada sessió els professors informaran als alumnes si han d'entregar un informe per escrit amb la resolució d'algunes de les qüestions formulades. Només es demanaran 5 informes de les 15 sessions de seminaris.

Al llarg del curs es farà una prova parcial per tal de que l'alumne sàpiga si està assolint els objectius proposats i en cas necessari poder modificar tot allò que no funciona.

Els alumnes interessats en desenvolupar algun tema relacionat amb l'assignatura individualment o en grups reduïts són encoratjats a contactar amb els professors de teoria i/o problemes per tal de servir-los de guia (donant algunes qüestions precises, bibliografia, etc...) en la realització d'un treball optatiu, susceptible de ser avaluat en la forma que s'especifica al punt corresponent a l'avaluació.

És important que l'alumne sigui capaç de prendre iniciativa fent ús de la biblioteca, alguns conceptes poden quedar més clars si veiem punts de vista d'altres autors. Aconsellem també l'ús del manipulador algebraic **Maple** per alleugerir alguns càlculs rutinaris i sobretot per obtenir representacions gràfiques que ajudin a l'alumne visualitzar tot tipus d'objectes geomètrics. D'aquest programa existeix una llicència de campus. També es poden consultar recursos d'internet com ara la pàgina web [www-history.mcs.st-andrews.ac.uk](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk), secció "Famous curves index", que conté molts exemples de corbes clàssiques definides implícitament així com parametritzades.

L'assignatura disposarà d'un espai al Campus Virtual. Es posaran les llistes d'exercicis, guions de seminaris i material complementari. El Campus Virtual també es pot fer servir com a fòrum de discussió per tractar temes relacionats amb l'assignatura.

Un dels millors consells per gaudir del que es fa a classe és estudiar *cada dia*. Si portem al dia el temari les classes són menys avorrides i s'aprofiten més. Sobretot intenteu entendre tot el que es diu a classe, això significa que s'han de fer preguntes als professors. En tot cas el professor també podrà posar qüestions als alumnes per tal de poder decidir sobre l'adequat ritme del curs.

Per últim, i no menys important, no cal oblidar que heu de parlar *matemàtiques*. Intentar dir amb paraules allò que ens passa pel cap. Per poder verbalitzar correctament l'enunciat d'un teorema, d'una definició o d'un problema estem obligats a tenir un coneixement profund d'allò que volem dir. No oblideu d'anar als despatxos a parlar amb els professors de l'assignatura. Tampoc oblideu que parlar amb els vostres companys sobre les matèries d'estudi pot tenir un efecte molt positiu.

## 7. Distribució del temps

Tipus d'activitat	Descripció	Hores
Activitats presencials	Classes de teoria	45
	Classes de problemes	15
	Classes de seminaris	30
	Realització d'exàmens	5
Activitats no presencials	Estudi de teoria	40
	Realització de problemes	60
	Preparació de seminaris	30
	Entrega de seminaris	25
	Realització de treballs	35
	Recerca bibliogràfica	15
	Preparació d'exàmens	0
<b>Total</b>	25 hores/ECTS per 12 ECTS	300

## 8. Avaluació

L'avaluació es farà tenint en compte l'assimilació dels continguts teòrics i pràctics de l'assignatura així com el treball continuat al llarg del curs, sense perjudici de la metodologia particular emprada per cada alumne. La quantificació d'aquestes dades es farà mitjançant els indicadors donats per les notes següents (totes elles normalitzades sobre 10):

- Avaluació continuada.
  - La preparació de la classe de problemes serà avaluada en cada sessió pel professor i donarà lloc a una nota  $P$ .
  - A mitjans del semestre, en una data que s'anunciarà amb prou antelació, es realitzarà una prova de seguiment de l'assignatura per avaluar els continguts teòrics i pràctics treballats a les classes de teoria i problemes fins a uns dies abans, i que donarà lloc a una nota  $M$ .
  - Abans de la realització de cada sessió de seminari farem públic el seu guió per tal que l'alumne el llegeixi amb atenció i faci les cerques bibliogràfiques que consideri oportunes per tal de resoldre els exercicis proposats en ell durant la sessió corresponent. Mitjançant preguntes orals al començament de cada sessió els professors avaluaran la preparació dels seminaris per part dels alumnes amb una nota  $S_1$ . De les 15 sessions, els professors escolliran 5 de les quals els alumnes hauran de presentar un informe per escrit amb la resolució d'algunes de les qüestions plantejades. L'entrega d'aquests 5 informes (en els terminis i la forma que es fixi per part dels professors) serà avaluada amb una nota  $S_2$ .
  - Al començament del curs, proposarem una sèrie de temes per a que, de manera optativa, individualment o en grups de fins a 5 persones, puguin ser estudiats i desenvolupats pels alumnes fora de l'horari de classe. La redacció d'aquest treball (en la que s'haurà d'indicar clarament quins són els autors reals) no es podrà entregar després de l'últim dia lectiu de la penúltima setmana de curs. Durant la última setmana cada grup farà una breu presentació, de 10 a 20 minuts, a la classe del seu treball. La realització i l'exposició d'aquests treballs d'ampliació seran avaluades amb una nota  $T$ .
- L'avaluació final, un cop acabat el període lectiu, es realitzarà mitjançant un examen de continguts principalment pràctics, basats en problemes del tipus que s'hagin tractat a classe. La nota d'aquest examen serà un nombre  $F$ .

La nota definitiva  $N$  de l'assignatura es calcularà amb la fórmula següent:

$$N = \frac{2S_2}{10} + C + (8 - C) \frac{\max(F, 0.25M + 0.75F)}{10} \quad \text{amb} \quad C = (0.5S_1 + 0.5P + 1.5T)/10.$$

## 9. Professorat

- Teoria, problemes i seminari: Eduardo Gallego i David Marín, despatx C1/126, Telèfon 4540.
- Seminari: Eva Miranda, despatx C1/-130, Telèfon: 2534.

## 10. Bibliografía

- [1] David Bachman. *A geometric approach to differential forms*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2006.
- [2] Marcel Berger. *Geometry. I*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the French by M. Cole and S. Levy.
- [3] Marcel Berger. *Geometry. II*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the French by M. Cole and S. Levy.
- [4] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces*, volume 115 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the French by Silvio Levy.
- [5] 3DXM Consortium. 3d-xplormath, <http://3d-xplormath.org/>.
- [6] L.A. Cordero, M. Fernández, and A. Gray. *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- [7] Manfredo P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Editorial, 1990. Translated from the Portuguese.
- [8] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern geometry—methods and applications. Part I*, volume 93 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1984. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields, Translated from the Russian by Robert G. Burns.
- [9] A. S. Fedenko. *Problemas de geometría diferencial*. MIR, 1991.
- [10] Richard Phillips Feynman. *Física (vol 2)*. Addison Wesley Iberoamericano, 1987.
- [11] Dmitry Fuchs and Serge Tabachnikov. *Mathematical omnibus*. Thirty lectures on classic mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [12] Joan Girbau. *Geometria diferencial i relativitat*. Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1993.
- [13] André Heck. *Introduction to Maple*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2003.
- [14] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the imagination*. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1952. Translated by P. Neményi.
- [15] M.L. Krasnov, A. I. Kiseliyov, and G. I. Makarenko. *Análisis vectorial*. MIR, 1978.
- [16] W. Kühnel. *Differential geometry. Curves - Surfaces - Manifolds*. AMS, 2002.
- [17] A. López de la Rica and A. de la Villa Cuenca. *Geometría diferencial*. CLAGSA, 1997.
- [18] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Cálculo vectorial, 3a edición*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- [19] S. Montiel and A. Ros. *Curvas y superficies*. Proyecto Sur, 1997.
- [20] Duane Nykamp. It multivariable calculus and vector analysis <http://www.math.umn.edu/nykamp/m2374/readings/>.
- [21] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. The mactutor history of mathematics archive <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>.

- [22] Barrett O'Neill. *Elementos de geometría diferencial*. Limusa-Wiley, 1972.
- [23] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.
- [24] A. V. Pogorélov. *Geometría diferencial*. MIR, 1977.
- [25] A. Reventós and C.J. Rodríguez. *Una lectura del "disquisitiones generales circa superficies curvas" de C.F. Gauss*. SCM, 2006.
- [26] Vladimir Rovenski. *Geometry of curves and surfaces with MAPLE*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2000.
- [27] Walter Seaman. Differential geometry images  
<http://www.math.uiowa.edu/~wseaman/DGImage53100.htm>.
- [28] M. Spivak. *Cálculo en variedades*. Editorial Reverté, 1979.
- [29] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. III*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [30] Dirk J. Struik. *Lectures on classical differential geometry*. Dover Publications Inc., New York, second edition, 1988.

#### Observacions:

- Les referències bàsiques per la part teòrica de corbes i superfícies són [7, 19, 22, 24, 30].
- La referència bàsica per la part teòrica del càlcul vectorial clàssic és [18].
- La referència bàsica per la formulació moderna del teorema de Stokes amb formes diferencials és [28].
- La referència bàsica per la teoria de l'electromagnetisme i la seva formulació matemàtica és [10].
- Dos llibres específics de problemes sobre geometria diferencial de corbes i superfícies són [9, 17] encara que el llibre [22] també en conté molts.

## 11. Annex

En el cas de que només es cursi una de les dues assignatures 28004 o 28001 caldrà tenir en compte les següents indicacions:

- Per qui estigui matriculat només de l'assignatura 28004 Geometria Diferencial.
  - Han de cursar els blocs 1 i 2 sencers i la secció 4.3 del programa.
  - L'examen parcial serà el mateix que en l'assignatura 100107. De l'examen final només caldrà que entreguin els problemes específicament indicats.
  - Faran els 7 primers seminaris i els 2 últims i hauran d'entregar 3 informes dels que s'indiquin.
- Per qui estigui matriculat només de l'assignatura 28001 Anàlisi Vectorial.
  - Han de cursar els blocs 3 i 4 sencers del programa.
  - No tindran examen parcial. De l'examen final només caldrà que entreguin els problemes específicament indicats.
  - Faran els 8 darrers seminaris i hauran d'entregar 2 informes dels que s'indiquin.