

# Àlgebra

## Presentació i objectius

L'objectiu d'aquesta assignatura és bàsicament arribar a presentar la teoria de Galois sobre resolubilitat d'equacions per radicals. Aquest problema, un dels més antics de l'història de les matemàtiques, té les seves arrels a l'antiguitat en temps dels Babilònics (~ 1700 AC) i culmina brillantment amb l'obra d'Evariste Galois (1811-1832) qui desenvolupà la teoria per a caracteritzar les equacions resolubles per radicals.

La presentació moderna de la teoria de Galois, que recull el treball de matemàtics com Artin, Dedekind, Kronecker i altres, representa una part central de l'àlgebra moderna on els mètodes d'abstracció utilitzats mostren la potència de diverses eines algebraïques introduïdes anteriorment. Per exemple, la traducció d'un mateix problema a la teoria de cossos i posteriorment a la teoria de grups ens permet desenvolupar aquestes branques aparentment llunyanes i entendre els lligams entre elles.

En aquest curs començarem per introduir el problema de la resolubilitat d'equacions per radicals en un context històric i els mètodes coneguts per a resoldre equacions de grau 2, 3 i 4. Posteriorment la teoria de cossos ens proporcionarà el marc formal adequat on plantejar el problema i presentar de manera clara la teoria de Galois d'equacions. Acabarem amb una aplicació de la teoria de cossos al problema clàssic de les construccions amb regla i compàs, que juntament amb la teoria de Galois ens permetrà obtenir una caracterització dels elements constructibles.

Una de les eines fonamentals per aquest curs és la teoria de grups i la seva introducció forçarà un parèntesi per tal de presentar les eines necessàries. En aquest cas, els grups resolubles posant un interès especial en el cas del grup de permutacions i la simplicitat del grup  $A_5$ , element clau per demostrar l'irresolubilitat de l'equació quintica general.

## Requisits previs

Aquesta assignatura requereix uns coneixements bàsics d'àlgebra lineal i àlgebra abstracta. En particular, cal entendre bé les nocions de divisibilitat i factorització a l'anell de polinomis, la construcció de l'anell quocient per un ideal, així com les nocions bàsiques de grups i la classificació de grups abelians finitament generats.

Aquests temes estan continguts en les assignatures Introducció a l'àlgebra lineal, Matemàtica discreta i Fonaments d'àlgebra del passat pla d'estudis de la titulació de Matemàtiques.

# Continguts

## 1. Introducció

Resolució d'equacions de grau 2, 3 i 4. El problema de la resolubilitat per radicals. Polinomis simètrics. Preliminars d'anells.

## 2. Extensions de cossos

Elements algebraics i elements transcendents. Extensions de morfismes. Adjunció d'arrels. Cossos de descomposició. Clausura algebraica. Cossos finits. Extensions normals. Extensions separables. Cossos perfectes.

## 3. Fonaments de la teoria de Galois

El grup de Galois. La correspondència de Galois i extensions de Galois. Teorema d'Artin-Dedekind. Teorema fonamental de la teoria de Galois. El cas dels polinomis genèrics.

## 4. Teoria de Grups

Teoremes d'isomorfia. Grups resolubles. Grups de permutacions. Teorema de Cayley. Simplicitat d' $A_5$ . Grups de Sylow.

## 5. Teoria de Galois d'equacions

Arrels de la unitat i polinomis ciclotòmics. Extensions radicals i extensions cíclics. Teorema de Galois sobre resolubilitat per radicals. Equacions irresolubles per radicals.

## 6. Construccions amb regla i compàs

Problemes clàssics. Construcció de polígons regulars. Teorema de Gauss-Wantzel. Caracterització d'elements constructibles.

# Avaluació

La nota de la primera convocatòria (febrer de 2009) s'obtindrà a partir de la nota d'avaluació continuada i la nota d'un *examen final*. L'avaluació continuada consistirà en l'*entrega de problemes* i un *examen parcial* a mitjans de novembre. Tan els problemes per entregar com el dia i l'hora de l'examen parcial seran anunciats convenientment a classe i també a través del Campus Virtual. Si denotem per  $N_e$ ,  $N_p$  i  $N_f$  les notes obtingudes per entrega de problemes, examen parcial i examen final respectivament i puntuades entre 0 i 10, la nota final s'obté com

$$0.15N_e + 0.15N_p + 0.7N_f$$

Si un alumne no es presenta a l'examen final, li constarà un "No presentat".

La nota de la segona convocatòria (juliol de 2009) s'obtindrà a partir d'un únic examen.

# Bibliografia

Els llibres de text que engloben la majoria de temes presents en aquesta assignatura solen presentar-se com a cursos de teoria de Galois. A la bibliografia bàsica podreu trobar alguns dels exemples més representatius i que us poden ser de més utilitat com a llibres de consulta.

A la bibliografia complementària trobareu algunes obres on consultar les qüestions més generals relatives als preliminars necessaris, una monografia enfocada a la vida i obra d'Evariste Galois i un parell de llibres de text també sobre teoria de Galois, però que col·loquem en aquest apartat ja que ofereixen un enfoc més fidel al desenvolupament original de la teoria que, tot i ser molt il·lustratiu, s'allunyen dels objectius d'aquest curs.

## Bibliografia bàsica

- E. ARTIN Teoría de Galois *Ed. Vicens Vives* 1970
- P.M. COHN Algebra Vol. 2 *John Willey & Sons* 1977
- J. ROTMAN, Galois Theory *Springer-Verlag* 1990
- D.J.H. GARLING A course in Galois Theory *Cambridge Univ. Press* 1986
- I. STEWART Galois Theory *Chapman and Hall* 1973
- A.M. DE VIOLA PRIORI I J.E. VIOLA-PRIORI Teoría de Cuerpos y Teoría de Galois *Ed. Reverté* 2006

## Bibliografia complementària

- P.M. COHN Algebra Vol. 1 (2ona Edició) *John Willey & Sons* 1982
- H. EDWARDS Galois Theory *Springer-Verlag* 1984
- J.P. TIGNOL Galois Theory of Algebraic Equations *World Scientific* 2001
- E. GALOIS Obra d'Evariste Galois, a cura d'Antoni Malet *IEC* 1984

## Professorat

*Teoria:* Ramon Antoine, despatx C1/324, hores de consulta a convenir.

*Problemes:* Javier Sanchez, despatx C1/-132, hores de consulta a convenir.