

GUIA DOCENT
GEOMETRIA DIFERENCIAL





1. Dades de l'assignatura

Nom de l'assignatura	Geometria Diferencial
Codi	100107
Crèdits ECTS	12
Curs i període en el que s'imparteix	3r Curs / 2n Semestre
Horari	http://mat.uab.cat/gmat/documents/curs1011/Horaris_matematiques.pdf
Lloc on s'imparteix	FACULTAT DE CIÈNCIES
Llengües	
Professor/a de contacte Nom professor/a	Joan Girbau Badó
Departament	Matemàtiques
Universitat/Institució	UAB
Despatx	C1/110
Telèfon	93. 581. 18.57
e-mail	girbau@mat.uab.cat
Horari d'atenció	Dilluns i dimarts de 11 a 12

2. Equip docent

Nom professor/a	Carlos Rodríguez Buitrago
Departament	Matemàtiques
Universitat/Institució	UAB
Despatx	CB/012
Telèfon	93.581.37.41
e-mail	crodri@mat.uab.cat
Horari de tutories	



3.- Prerequisits

Per assimilar tots els continguts de l'assignatura s'ha de tenir un coneixement previ de càlcul en diverses variables (derivació, integració, teorema de la funció implícita), d'equacions diferencials (teorema d'existència i unicitat de solucions), d'àlgebra i geometria lineals (diagonalització d'endomorfismes autoadjunts, formes quadràtiques, còniques i quàdriques) i topologia (nocions de triangulació, característica d'Euler, superfície compacta i homeomorfisme).

4.- Contextualització i objectius formatius de l'assignatura

Els conceptes i nocions de la geometria diferencial i del càlcul vectorial són bàsics per a la comprensió de la realitat física que ens envolta. També són importants les seves aplicacions tècniques en el camp de l'enginyeria, on els objectes d'estudi es poden representar geomètricament per elements no lineals de l'espai tridimensional \mathbb{R}^3 , és a dir, bàsicament per corbes i superfícies.

L'objectiu principal és conèixer quines són les nocions geomètriques que permeten caracteritzar de manera teòrica la forma d'aquests elements (curvatura i torsió en el cas d'una corba, primera i segona forma fonamental en el cas d'una superfície), així com desenvolupar mètodes de càlcul de les seves característiques mètriques (longitud, àrea, etc.). També és important relacionar els invariants associats a una corba continguda en una superfície amb les nocions i magnituds pròpies d'aquesta última. Aquestes propietats seran tractades en els dos primers blocs de l'assignatura.

En el tercer bloc del curs s'introduiran les nocions clàssiques del càlcul vectorial de \mathbb{R}^3 : camps vectorials i les seves integrals de línia, superfície i volum així com els teoremes integrals de Green, Gauss i Stokes que les relacionen. També es tractaran en aquest punt alguns models de la física que utilitzen aquest llenguatge, com ara les equacions de Maxwell de l'electromagnetisme.

L'últim bloc del curs tracta de la formulació general del teorema de Stokes a \mathbb{R}^n utilitzant formes diferencials i les seves aplicacions a la geometria intrínseca de les superfícies. Un dels objectius d'aquest punt és provar el teorema de Gauss-Bonnet per a superfícies compactes.

5.- Competències i resultats d'aprenentatge de l'assignatura

Competència	CG4. Seran capaços de transmetre coneixements, procediments, resultats i idees matemàtiques.
Resultats d'aprenentatge	Saber plantejar i resoldre integrals curvilínies i integrals de superfície. Aplicar les integrals de línia i superfície per reconèixer algunes propietats globals de corbes i superfícies. Usar algun tipus de programari científic per realitzar càlculs i visualitzar superfícies.
Competència	CG5. Hauran desenvolupat aquelles habilitats d'aprenentatge necessàries per emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
Resultats d'aprenentatge	Aplicar les integrals de línia i superfície per reconèixer algunes propietats globals de corbes i superfícies. Entendre les aplicacions del càlcul vectorial i de la geometria diferencial a problemes de la física. Usar algun tipus de programari científic per realitzar càlculs i visualitzar superfícies.
Competència	CE3. Reconèixer la presència de les matemàtiques en altres disciplines.
Resultats d'aprenentatge	Entendre les aplicacions del càlcul vectorial i de la geometria diferencial a problemes de la física. Usar algun tipus de programari científic per realitzar càlculs i visualitzar superfícies.
Competència	CE5. Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, relacionar-los amb altres coneguts i deduir les seves propietats.
Resultats d'aprenentatge	Reconèixer la naturalesa dels punts d'una corba a \mathbb{R}^3 . Càlcul de curvatura i torsió. Reconèixer la naturalesa dels punts d'una superfície en \mathbb{R}^3 . Càlcul de la curvatura de Gauss, curvatura mitjana i curvatures principals. Entendre les aplicacions del càlcul vectorial i de la geometria diferencial a problemes de la física.



6.- Continguts de l'assignatura

1. Corbes

- Parametritzacions i longitud.
- Corbes planes.
- Corbes a l'espai

2. Superfícies.

- Parametritzacions i primera forma fonamental.
- Aplicació de Gauss i segona forma fonamental.
- Curvatures.
- Teorema Egregi de Gauss.

3. Formulació clàssica del càlcul vectorial.

- Camps vectorials.
- Integrals de línia i de superfície.
- Teoremes integrals.
- Models de la física.

4. Formes diferencials i teorema de Stokes.

- Formes diferencials.
- Teorema de Stokes.
- Mètode de la referència mòbil i teorema de Gauss-Bonnet.

7.- Metodologia docent i activitats formatives

Cada setmana lectiva del curs es faran 3 sessions de 1 hora de *teoria*, 1 sessió de 1 hora de *problemes* i 1 sessió de 2 hores de *seminari*.

Com a norma general, a les classes de teoria primer s'introduiran els conceptes i després s'il·lustraran amb exemples abundants i alguns problemes típics.

Respecte de les classes de problemes, el primer que cal és que l'alumne *pensi* els problemes que se li proposen a les llistes de problemes. La situació ideal consisteix a anar a classe de problemes amb els problemes fets o estudiats en hores d'estudi. És poc útil observar com un altre persona fa els problemes; és com aprendre a tocar el piano veient com ho fa un altre! El professor de problemes anirà prenent nota dels problemes treballats per cada alumne amb anterioritat a la seva resolució a classe.

Pel que fa a les sessions de seminari, els seus principals objectius són : 1) Millorar la capacitat dels alumnes per llegir textos de matemàtiques. 2) Que els alumnes aprenguin a validar o refusar raonadament els arguments d'altres persones. 3) Que els alumnes aprenguin a utilitzar la bibliografia i eines d'Internet específiques. 4) Que els alumnes siguin capaços d'aprendre nous coneixements i tècniques de manera autònoma.

Per fer això es desenvoluparan les següents activitats: 1) Discussions sobre lectures especials en les quals s'aprenen nous coneixements i tècniques. 2) Correcció de solucions de problemes de l'assignatura redactades per altres companys de curs. 3) Redacció de treballs que exigeixen la utilització de bibliografia i d'eines d'Internet. La dinàmica que es seguirà serà la següent: Abans de la realització de cada sessió de seminari els professors faran públic un guió en el qual figurin els objectius de la sessió i una llista d'exercicis i observacions pautades a fi d'assolir-los. Els alumnes l'hauran de llegir amb atenció i podran fer les cerques bibliogràfiques que considerin oportunes per tal de resoldre els exercicis proposats. Durant la sessió els professors poden resoldre dubtes puntuals, però no fer exposicions magistrals. En cada sessió els professors informaran els alumnes si els cal entregar un informe per escrit amb la resolució d'algunes de les qüestions formulades.

Al llarg del curs es farà una prova parcial per tal que l'alumne sàpiga si està assolint els objectius proposats i en cas necessari poder modificar tot allò que no funciona.

És important que l'alumne sigui capaç de prendre iniciativa fent ús de la biblioteca. Alguns conceptes poden quedar



més clars si veiem punts de vista d'altres autors. Aconsellem també l'ús del manipulador algebraic Mapl e per alleugerir alguns càlculs rutinaris i sobretot per obtenir representacions gràfiques que ajudin a l'alumne visualitzar tot tipus d'objectes geomètrics. D'aquest programa existeix una llicència de campus. També es poden consultar recursos d'internet com ara la pàgina web www-history.mcs.st-andrews.ac.uk, secció "Famous curves index", que conté molts exemples de corbes clàssiques definides implícitament així com parametritzades.

L'assignatura disposarà d'un espai al Campus Virtual. Es posaran les llistes d'exercicis, guions de seminaris i material complementari. El Campus Virtual també es pot fer servir com a fòrum de discussió per tractar temes relacionats amb l'assignatura.

Un dels millors consells per gaudir del que es fa a classe és estudiar *cada dia*. Si portem al dia el temari les classes són menys avorrides i s'aprofiten més. Sobretot intenteu entendre tot el que es diu a classe, això significa que s'han de fer preguntes als professors. En tot cas el professor també podrà posar qüestions als alumnes per tal de poder decidir sobre l'adequat ritme del curs.

Per últim, i no menys important, no cal oblidar que heu de parlar *matemàtiques*. Intentar dir amb paraules allò que ens passa pel cap. Per poder verbalitzar correctament l'enunciat d'un teorema, d'una definició o d'un problema estem obligats a tenir un coneixement profund d'allò que volem dir. No oblideu d'anar als despatxos a parlar amb els professors de l'assignatura. Tampoc oblideu que parlar amb els vostres companys sobre les matèries d'estudi pot tenir un efecte molt positiu.

TIPUS D'ACTIVITAT	ACTIVITAT	HORES	RESULTATS D'APRENTATGE
-------------------	-----------	-------	------------------------

Dirigides

Classes de teoria	45	
Classes de problemes	15	
Classes de seminaris	30	

Supervisades

Autònomes

Estudi de teoria	40	
Realització de problemes	60	
Preparació de seminaris	30	
Entrega de seminaris	25	
Realització de treballs	35	
Recerca bibliogràfica	15	
Preparació d'exàmens	0	



8.- Avaluació

L'avaluació es farà tenint en compte l'assimilació dels continguts teòrics i pràctics de l'assignatura així com el treball continuat al llarg del curs, sense perjudici de la metodologia particular emprada per cada alumne. La quantificació d'aquestes dades es farà mitjançant els indicadors donats per les notes següents (totes elles normalitzades sobre 10):

- Avaluació continuada.
 - A mitjans del semestre, en una data que s'anunciarà amb prou antelació, es realitzarà una prova de seguiment de l'assignatura per avaluar els continguts teòrics i pràctics treballats a les classes de teoria i problemes fins a uns dies abans, i que donarà lloc a una nota M .
 - Els professors de problemes i de pràctiques avaluaran el treball de cada alumne. Sigui P la mitjana d'aquestes qualificacions de problemes i de pràctiques.
- L'avaluació final, un cop acabat el període lectiu, es realitzarà mitjançant un examen de continguts principalment pràctics, basats en problemes del tipus que s'hagin tractat a classe. La nota d'aquest examen serà un nombre F .

La nota definitiva N de l'assignatura es calcularà amb la fórmula següent:

$$N=0,2 P + 0,8 \max(F, 0,25 M+ 0,75 F)$$

ACTIVITATS D'AVALUACIÓ	HORES	RESULTATS D'APRENTATGE
Realització d'exàmens	5	

9- Bibliografia i enllaços web

- David Bachman. *A geometric approach to differential forms*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2006.
- Marcel Berger. *Geometry. I*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the French by M. Cole and S. Levy.
- Marcel Berger. *Geometry. II*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the French by M. Cole and S. Levy.
- Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces*. Volume 115 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the French by Silvio Levy.
- 3DXM Consortium. *3d-xplormath*. <http://3d-xplormath.org/>.
- L.A. Cordero, M. Fernández, and A. Gray. *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- Manfredo P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Editorial, 1990. Translated from the Portuguese.
- B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern geometry - methods and applications*. Part I, volume 93 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1984. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields, Translated from the Russian by Robert G. Burns.
- A. S. Fedenko. *Problemas de geometría diferencial*. MIR, 1991.



- Richard P. Feynman. *Física*. (vol 2). Addison Wesley Iberoamericano, 1987.
- Dmitry Fuchs and Serge Tabachnikov. *Mathematical omnibus*. Thirty lectures on classic mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- Joan Girbau. *Geometria diferencial i relativitat*. Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1993.
- André Heck. *Introduction to Maple*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2003.
- D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the imagination*. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1952. Translated by P. Neményi.
- M.L. Krasnov, A. I. Kiseliov, and G. I. Makarenko. *Análisis vectorial*. MIR, 1978.
- W. Kühnel. *Differential geometry. Curves - Surfaces - Manifolds*. AMS, 2002.
- A. López de la Rica and A. de la Villa Cuenca. *Geometría diferencial*. CLAGSA, 1997.
- J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Cálculo vectorial*. 3a edición. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- S. Montiel and A. Ros. *Curvas y superficies*. Proyecto Sur, 1997.
- Duane Nykamp. *It multivariable calculus and vector analysis*. <http://www.math.umn.edu/nykamp/m2374/readings/>.
- John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. *The mactutor history of mathematics archive*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>.
- Barrett O'Neill. *Elementos de geometría diferencial*. Limusa-Willey, 1972.
- Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*. Volume 103 of Pure and Applied Mathematics. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.
- A. V. Pogorélov. *Geometría diferencial*. MIR, 1977.
- A. Reventós and C.J. Rodríguez. *Una lectura del "disquisitiones generales circa superficies curvas" de C.F. Gauss*. SCM, 2006.
- Vladimir Rovenski. *Geometry of curves and surfaces with MAPLE*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2000.
- Walter Seaman. *Differential geometry images*. <http://www.math.uiowa.edu/~wseaman/DGImage53100.htm>.
- M. Spivak. *Cálculo en variedades*. Editorial Reverté, 1979.
- Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Vol. III. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- Dirk J. Struik. *Lectures on classical differential geometry*. Dover Publications Inc., New York, second edition, 1988.