

### 1.- Identificació de l'assignatura

Nom de l'assignatura: Processos Estocàstics

Codi: 100116

Nombre de crèdits: 6

Tipus: Optativa.

### 2.- Objectius de l'assignatura

L'objectiu d'aquesta assignatura és, d'una banda, introduir l'alumne en la part de la *Teoria de la Probabilitat* anomenada *Teoria dels Processos Estocàstics*, que té per objecte d'estudi els fenòmens aleatoris que evolucionen amb el temps o en l'espai. Els models per a aquests tipus de fenòmen són els Processos Estocàstics, que estudiarem en aquesta assignatura. Veurem les generalitats bàsiques d'aquests models i estudiarem alguns models concrets.

S'estudiaran, doncs, amb una mica de detall els que segurament són els processos estocàstics més estudiats i utilitzats: el procés de Wiener o moviment Brownià, i el Procés de Poisson. Es tractaran les Cadenes de Markov a temps discret (en general), amb dos exemples concrets: el Procés de Passeig Aleatori (s'estudiarà també el clàssic *Problema de la ruïna del jugador*), i el Procés de Ramificació de Galton-Watson. Veurem també algunes Cadenes de Markov a temps continu com, per exemple, el *Procés de Poisson* o els *Processos de Naixement i Mort*.

Prèviament es farà un repàs d'alguns conceptes i resultats fonamentals de la Probabilitat, ja coneguts per l'alumne, a la vegada que s'introdueixen noves eines probabilístiques que seran d'utilitat en l'estudi dels processos estocàstics.

### 3.- Continguts

#### 1. Introducció

Definició de procés estocàstic i exemples. Processos equivalents. Teorema de Kolmogorov. Diferents tipus de processos.

#### 2. Passeig aleatori

Problema de la ruïna d'un jugador. Estudi del passeig aleatori.

#### 3. Cadenes de Markov a temps discret

Cadenes de Markov amb probabilitats de transició estacionàries. Temps d'atur. Propietat forta de Markov. Estats recurrent i transitori. Gràfic d'una cadena. Classes d'equivalència. Període. Comportament asimptòtic. Distribucions estacionàries.

4. Cadenes de Markov a temps continu  
El procés de Poisson. Matrius de transició. Processos de naixement i mort.
5. El moviment Brownià  
Introducció històrica del moviment Brownià. Del passeig aleatori al moviment Brownià. Definició. Existència. Construcció de Paul Lévy. Algunes propietats del moviment Brownià i de les seves trajectòries.

#### 4.- Temps que ha de dedicar l'alumne per tal de superar l'assignatura

Tipus d'activitat	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de teoria	28
	Classes de problemes	14
	Seminaris	6
	Activitats tutoritzades	0
	Realització de proves parcials	4
	Realització d'exàmens finals	4
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudi de teoria	46
	Realització de problemes	24
	Preparació de pràctiques	0
	Preparació d'exàmens	24
	Total	150

#### 5.- Capacitats, competències i destreses que es treballen a l'assignatura.

- **Comprendre i utilitzar el llenguatge matemàtic:** entendre les definicions i enunciats de les diferents parts de l'assignatura fets a les classes de teoria, i adquirir la capacitat d'enunciar resultats de manera correcta, de veure quin paper juguen les hipòtesis, de construir demostracions vàlides, i de transmetre els coneixements matemàtics adquirits. Aquesta capacitat es treballarà tant a les classes de teoria com de problemes.
- **Asimilar la definició de nous conceptes matemàtics i conèixer enunciats i demostracions rigoroses** d'alguns resultats clàssics de la Teoria dels Processos Estocàstics presentats a la classe de teoria, sobre els que es treballarà l'aplicació en diferents contextos en classe de problemes, estimulants el seu esperit crític:
  - Definició de *procés estocàstic* en general i de certs conceptes relacionats, com ara les *distribucions en dimensió finita* o les *trajectòries*. El Teorema d'existència de Kolmogorov i el Criteri de continuïtat.
  - Els principals tipus de processos estocàstics. En particular, la definició i principals propietats d'alguns processos clàssics, com ara el *Passeig Aleatori*, el *Procés de Poisson* o el *Procés de Wiener* o *Moviment Brownià*.
  - Els resultats bàsics sobre el *Procés de Galton-Watson*.

- La definició i principals resultats sobre les *Cadenes de Markov a temps discret i a temps continu*, que són els processos que s'estudiaran amb més profunditat. En particular, les *equacions backward de Kolmogorov*, també conegudes com a equacions de Focke-Plank, i les *equacions forward o directes de Kolmogorov*. És important l'estudi de les distribucions estacionàries d'aquests processos.
  - Com a exemple notable de Cadena de Markov a temps continu, conèixer els processos anomenats *de Naixement i Mort* (dels quals el procés de Poisson n'és un exemple) i, en particular, els resultats sobre el seu comportament estacionari que es presenten.
  - Un altre exemple notable de Cadena de Markov a temps continu són els processos coneguts com a *Cues Markovianes*, de gran aplicabilitat física, industrial, etc. Es tracta d'entendre la seva definició i les seves propietats elementals.
- **Saber abstraure les propietats fonamentals** dels objectes matemàtics i de la realitat, distingint-les de les ocasionals, i poder-les comprovar amb demostracions o refutar-les amb contraexemples. Es treballarà la capacitat per intuir i demostrar propietats d'alguns processos estocàstics a partir de la seva definició: el procés del Passeig Aleatori, que es presenta a partir d'una aplicació clàssica: el *problema de la ruïna del jugador*, el procés de Wiener o moviment Brownià i d'altres processos relacionats amb ell, el procés de Poisson, les Cadenes de Markov, els processos de cues,...
  - **Proposar, analitzar, validar i interpretar models de situacions reals** diverses senzilles (físiques, biològiques, d'enginyeria,...), fent servir les eines més adequades en cada cas. Aquesta capacitat de modelització de la realitat es mostrarà a la classe de teoria en base a exemples, i després es treballarà a la classe de problemes gràcies a la realització de problemes aplicats a diferents àrees. Per exemple, es posarà l'èmfasi en
    - La modelització de problemes reals pertinenents mitjançant *processos de ramificació* i el càlcul de la *probabilitat d'extinció* corresponent fent servir la *funció generatriu de probabilitat*.
    - La resolució de certs problemes aplicats gràcies a l'utilització del procés de Passeig Aleatori com a model matemàtic.
    - Treballar amb el procés de Poisson, en diferents situacions pràctiques, com a model teòric que permet resoldre certes qüestions aplicades que es plantegen.
    - La modelització de diferents situacions reals mitjançant les cadenes de Markov, els processos de naixement i mort o les Cues Markovianes, de gran versatilitat en les aplicacions. Per a aquests últims processos, ser capaç de calcular les seves mesures d'efectivitat (temps mitjà d'espera d'un client al sistema, nombre mitjà de clients en cua,...) i la distribució estacionària quan es pugui.
  - **Aprendre de manera autònoma nous coneixements i tècniques** mitjançant la realització de problemes i de petits treballs.
  - **Resoldre problemes matemàtics** planificant la seva resolució en funció de les eines disponibles que s'hauran exposat a la classe de teoria. Es treballarà fonamentalment a les classes de problemes.

- **Comunicar, per escrit i de forma oral**, coneixements, procediments, resultats i idees relacionats amb els Processos Estocàstics i la Probabilitat. Es treballarà a la classe de problemes i amb la realització d'un o dos controls que es faran al llarg del curs i que permetrà al professor copsar l'habilitat de l'alumne en aquest sentit, per tal de poder corregir el que sigui necessari. També a classe de teoria, quan els alumnes formulen les seves preguntes o dubtes, i a les tutories personalitzades, es pot incidir sobre aquesta competència.

## 6.- Requisits previs

Com a requisits generals per a l'assignatura, citarem un bon coneixement a nivell pràctic d'Anàlisi i Càlcul, així com els rudiments de l'Àlgebra lineal i de les Equacions Diferencials. Com a requisits específics, només els rudiments de Teoria de la Probabilitat que s'introdueixen a l'assignatura de tercer curs, amb un bon nivell tant a nivell teòric com pràctic, i els d'Anàlisi i Càlcul relacionats amb integració i sèries.

## 7.- Metodologia

Aquesta assignatura és quadrimestral i consta de dues hores de teoria i una hora de problemes a la setmana de classe presencial. A més a més hi haurà tres sessions de seminaris de dues hores.

La introducció de coneixements teòrics a la classe de teoria és fonamental per tal que l'alumne pugui entendre i assolir els fonaments de la Teoria de Processos Estocàstics que s'introdueix en aquesta assignatura. El coneixement de les nocions introduïdes a teoria, dels enunciats de les proposicions i teoremes, així com dels exemples d'aplicació, resulten fonamentals per tal que l'alumne pugui, a la classe de problemes, resoldre les qüestions plantejades mitjançant una metodologia semblant. Es treballarà l'estructura definició-enunciat de teorema-demostració-aplicació, ja que és la manera que l'alumne pugui entendre i seguir els raonaments de la teoria matemàtica que s'està explicant, a la vegada que pugui veure i entendre com juguen els diferents elements de què es disposa a les demostracions de nous fets matemàtics, així com les hipòtesis que es necessita imposar. Naturalment, s'intenta estimular l'esperit crític davant qualsevol afirmació matemàtica, així com la intuïció de l'adequació dels diferents models matemàtics utilitzats a les situacions reals més diverses (físiques, biològiques, etc), gràcies a la realització de problemes aplicats a diferents àrees, on la modelització hi juga un paper molt important.

A les classes de problemes els alumnes treballen amb llistes de problemes. La resolució de problemes serà en tot moment supervisada pel professor de problemes, que farà tots els comentaris que consideri adients per tal de completar una millor comprensió del problema que s'estigui treballant. També tindrà cura de l'expressió tant oral com escrita dels alumnes.

Durant el semestre es realitzaran una prova intersemestral o control, per intentar incentivar la participació dels estudiants a les classes i la seva dedicació continuada a l'assignatura. Aquesta prova també servirà per poder valorar si es fa una utilització correcta del llenguatge matemàtic i si es presenten els resultats de manera adequada, ordenada i correcta.

Naturalment, les hores de tutoria del professor serveixen per a que l'alumne pugui consultar dubtes, comentar qualsevol cosa que consideri interessant, ja sia sobre la teoria

o sobre els exercicis de la classe de problemes, així com demanar ajut per tal de resoldre algun exercici amb el que tingui dificultats o per realitzar el treball. En general, la tutoria permet a l'alumne posar-se en contacte amb el professor per tal de poder comentar qualsevol aspecte de l'assignatura que consideri convenient. És important fer servir les tutories per poder comentar els aspectes més destacats detectats pel professor en corregir els problemes presentats o els treballs.

## **8.- Avaluació**

En la nota final de l'assignatura el control d'avaluació continuada tindrà un pes del 30% i l'examen final un pes del 70%. Aquesta fórmula serà aplicable a les dues convocatòries de l'assignatura.

## **9.- Bibliografia**

Breiman, L. *Probability and Stochastic Processes: with a view toward applications*. Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

Brémaud, P. *Markov Chains: Gibbs measures, Montecarlo simulation and queues*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 1998.

Feller, W. *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones, Vol I*. John Wiley & Sons, 1988.

Gross, D. and Harris, C. M. *Fundamentals of Queueing Theory*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Wiley, 1974.

Karlin, S. and Taylor, M. H. *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York, 1975.

Karlin, S. and Taylor, M. H. *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York, 1981.

Kleinronck, L. *Queueing Systems. Volume 1: Theory*. Wiley-Interscience. Wiley, 1975.

Lawler, Gregory F. *Introduction to Stochastic Processes*. Chapman and Hall/CRC Probability Series, 1995.

## **10.- Professorat**

Lluís Quer (Despatx: C1/210, Tel. 93 581 4542, e-mail: quer@mat.uab.cat). Teoria i problemes.

Tutories: a convenir