

Funcions de variable real**2012/2013**

Codi: 100087

Crèdits ECTS: 12

Titulació	Pla	Tipus	Curs	Semestre
2500149 Graduat en Matemàtiques	777 Graduat en Matemàtiques	FB	1	A

Professor de contacte

Nom: Julià Cufí Sobregrau

Correu electrònic: Julia.Cufi@uab.cat

Utilització d'idiomes

Llengua vehicular majoritària: català (cat)

Algun grup íntegre en anglès: No

Algun grup íntegre en català: Sí

Algun grup íntegre en espanyol: No

Prerequisits

Per tal que un alumne pugui cursar l'assignatura és imprescindible que tingui una certa destresa en la manipulació algebraica de fraccions o d'expressions que continguin arrels, potències, etc. També és molt aconsellable que l'estudiant tingui amplis coneixements de trigonometria, que sàpiga les raons trigonomètriques de la suma i de l'angle doble. Finalment, és d'esperar que l'estudiant pugui fer, sense gaire dificultat, la representació gràfica de funcions racionals relativament senzilles. Pressuposem també que la persona que cursa aquesta assignatura està familiaritzada amb raonaments de tipus lògic, que sap negar frases o proposicions, etc, i que coneix la mecànica bàsica per a derivar i integrar funcions.

Encara que el curs serà força autocontingut es requerirà que l'alumne conegui la resolució de sistemes d'equacions lineals i l'aritmètica bàsica de números i de polinomis, i que tingui detresa de càlcul amb expressions algebraiques simbòliques. El requisit més important, però, és una gran curiositat per entendre profundament els temes que s'estudiaran.

Objectius

A nivell de coneixements, l'objectiu de l'assignatura és que l'estudiant sedimenti sòlidament els conceptes bàsics del Càlcul Infinitesimal: les funcions de variable discreta (successions) o contínua, llur variabilitat, límit, derivada i integral. A nivell de competències, també és un objectiu en si mateix que assoleixi una certa destresa en la manipulació i càlcul de límits, derivades i integrals i sàpiga aplicar els teoremes bàsics d'aquesta teoria. Finalment, hi ha també un objectiu formatiu de caràcter genèric que és que l'alumne comenci a desenvolupar la capacitat d'anàlisi i de raonar rigorosament. Assolir aquests objectius és quelcom imprescindible com a requisit de la matèria "Fonaments d'Anàlisi Matemàtica" (tres assignatures) i en definitiva per a una correcta progressió en els estudis del grau.

Competències

- Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
- Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
- Calcular, reproduir determinades rutines i processos matemàtics amb agilitat
- Comprendre i utilitzar el llenguatge matemàtic
- Utilitzar aplicacions informàtiques d'anàlisi estadística, càlcul numèric i simbòlic, visualització gràfica, optimització o altres per experimentar en Matemàtiques i resoldre problemes

Resultats d'aprenentatge

1. Assimilar els conceptes i el objectes matemàtiques propis de l'assignatura, que apareixen als seus continguts.
2. Calcular derivades de funcions mitjançant la regla de la cadena, el Teorema de la Funció Implícita, etc.
3. Calcular i estudiar extrems de funcions. Calcular integrals de funcions d'una variable.
4. Demostrar el coneixement dels objectes propis del càlcul amb funcions d'una variable real i de les seves propietats i utilitats.
5. Llegir i comprendre un text de matemàtiques del nivell del curs.

6. Manipular desigualtats i successions, analitzar i dibuixar funcions, deduir propietats d'una funció a partir del gràfic, comprendre i treballar intuïtivament, geomètrica i formalment amb les nocions de límit, derivada i integral.
7. Redactar de manera ordenada i amb precisió petits textos matemàtics (exercicis, resolució de qüestions de teoria,?)
8. Redactar de manera ordenada i amb precisió petits textos matemàtics (exercicis, resolució de qüestions de teoria,?)
9. Relacionar aquests conceptes amb els mètodes i objectes propis d'altres àmbits
10. Resoldre problemes que impliquen el plantejament d'integrals (longituds, àrees, volums, etc.)
11. Resoldre problemes que impliquen el plantejament d'integrals (longituds, àrees, volums, etc.)
12. Saber explicar idees i conceptes matemàtics propis del curs, així com saber comunicar a tercers raonaments propis
13. Seguir i comprendre una explicació oral d'un tema de matemàtiques relacionat amb el curs.

Continguts

El programa de l'assignatura està organitzat en sis capítols:

I. La recta real.

- Els nombres racionals i la seva incompletitud.
- El concepte de nombre real, expressió decimal i binària.
- Operacions i desigualtats entre nombres reals.
- Numerabilitat.
- Suprem i ínfim d'un conjunt.
- Axioma de completitud.
- Nombres reals distingits: i e

II. Successions de nombres reals.

- Funcions reals de variable discreta o contínua
- Límit d'una successió. Propietats algebraïques.
- Els conceptes d'infinitèsim i infinit.
- Successions monòtones.
- Punts d'acumulació. Successions parcials. El Teorema de Bolzano-Weierstrass. Conjunts compactes.
- Successions de Cauchy i reënunciament de l'axioma de completitud.
- Càlcul de límits.

III. Continuitat de funcions.

- Funcions de variable real. Domini d'una funció.
- Funcions polinòmiques, racionals, exponencials i trigonomètriques vs funcions experimentals.
- Límit d'una funció en un punt, límits laterals, assíptotes.
- Propietats algebraïques.
- Continuitat d'una funció.
- Teorema de Bolzano, localització d'arrels.
- Teorema dels valors intermedis i Teorema de Weierstrass.
- Funcions monòtones, funció inversa, continuïtat de la funció inversa, funcions logarítmiques i radicals.
- Funcions periòdiques, períodes.

IV. Càlcul diferencial.

- Derivada d'una funció en un punt com a taxa instantània de variació: interpretació geomètrica.
- Derivació i funcions constants: primer teorema fonamental.
- Propietats algebraïques de la derivada.
- Regla de la cadena. Derivació de la funció inversa.
- Extrems absoluts i relatius d'una funció.
- Teorema de Rolle. Teorema del valor mitjà.
- Aplicacions al càlcul de zeros de funcions i a l'obtenció de desigualtats, regla de l'Hôpital.

V. Derivades d'ordre superior.

- Derivada d'ordre superior d'una funció en un punt.
- Ordre de contacte entre funcions.
- Polinomi de Taylor. Propietats.
- Polinomis de Taylor de funcions elementals.
- La fórmula de Taylor com a aproximació local.
- Convexitat de funcions. Convexitat i continuïtat.
- Estudi local d'una funció.

VI. Integral de Riemann.

- Quins problemes volem resoldre?
- Sumes superiors i inferiors de funcions acotades.
- Funcions integrables. Integral.
- La integral com un procés de sumació per pas al límit. Criteri d'integrabilitat.
- Integrabilitat de les funcions monòtones i de les funcions contínues.
- El Teorema Fonamental del Càlcul. Existència de primitiva d'una funció contínua.
- Càlcul d'integrals mitjançant càlcul de primitives, el Teorema del canvi de variable, la fórmula d'integració per parts.
- Aplicacions al càlcul d'àrees, longitud de gràfiques i volums de revolució.
- Densitats, masses i centres de gravetat de distribucions unidimensionals.

Metodologia

L'assignatura disposa d'un únic grup de teoria, dos grups de problemes i quatre grups de seminari-pràctiques.

L'assignatura disposa, al llarg del primer trimestre de tres hores de classe de teoria (un únic grup) i dues hores de classe de problemes (dos grups) cada setmana. A més, els seminaris (quatre grups, una sessió de dues hores cada dues setmanes en terme mig) es destinaran al treball en grup tutoritzat.

Durant el segon trimestre hi haurà dues hores de teoria; les classes de problemes i els seminaris seguiran el ritme d'una sessió de dues hores cada dues setmanes.

Els horaris i aules hauran de consultar-se al web de la titulació (<http://mat.uab.cat/gmat>).

Està oberta una aplicació d'aquesta assignatura al Campus Virtual (CV) de la universitat per tal de subministrar tot el material i tota la informació relativa a aquesta assignatura que li calgui a l'estudiant, en particular les hores de tutoria dels professors.

Classes de teoria. El professor anirà desenvolupant els temes del programa en l'ordre indicat; l'alumne tindrà al CV un document de "Desenvolupament de la docència" on de forma indicativa s'indica les hores dedicades a cada tema. Al CV hi haurà també a disposició dels alumnes un material de suport a l'estudi de la teoria. És molt important que l'estudiant hagi treballat personalment, utilitzant aquest material i/o els llibres de text que s'indiquen a la bibliografia abans d'anar a classe. El professor tot sovint deixarà a càrrec de l'alumne completar les demostracions d'alguns resultats, feina que s'haurà de fer individualment amb l'ajut dels llibres de text i utilitzant les hores de tutoria. És molt recomanable portar al dia una llibreta dels apunts presos a classe.

Classes de problemes. Es distribuïran tres llistes de problemes cada trimestre, disponibles al CV. Aquests són els que es treballaran a classe de problemes, però és bàsic que l'estudiant els pensi abans pel seu compte. A la classe de problemes els professors també resoldran completament alguns dels problemes de les llistes a la pissarra, però no tots. Alguns dels problemes de les llistes portaran l'indicatiu * que n'indica un grau de dificultat més elevat. Altres portaran l'indicatiu **, el signicat del qual s'explica a la secció "Avaluació".

Els seminaris, com s'ha dit anteriorment, són activitats de treball en grup sota la supervisió d'un professor tutor. Cada grup farà una sessió de dues hores cada dues setmanes, en terme mig. Cada sessió seguirà un guió que s'haurà posat al CV prèviament i que es distribuirà també a la classe. A la part final de cada sessió cada alumne haurà d'intentar fer, individualment, un petit exercici, que lliurarà signat al professor. Alguns dels seminaris consistiran en utilitzar MAPLE per a aspectes específics de l'assignatura.

IMPORTANT: Degut a festes i altres incidències, pot passar que una determinada setmana un determinat grup de problemes o seminari no tingui sessió, en aquest casos s'intentarà recuperar-la. En cas contrari- i també quan no es pugui assistir a la sessió de problemes o seminari per causes personals- els alumnes afectats s'han de redistribuir per ells mateixos lliurament entre els grups restants, comunicant-ho al professor responsable.

Finalment, es recorda que els alumnes disposaran d'unes hores de tutoria al despatx dels professor de teoria, de problemes i de seminaris, on podran consultar dubtes i demanar tota mena d'ajuda en el seu treball. L'horari per a cada professor serà anunciat al CV.

Activitats formatives

Títol

Hores

ECTS

Resultats d'aprenentatge

Tipus: Dirigides			
Classes de teoria	59	2,36	2, 3, 6, 10, 11
Tipus: Supervisades			
Activitats tutoritzades	25	1	2, 3, 6, 10, 11
Classes de problemes	30	1,2	10, 11
Tipus: Autònomes			
Estudi de teoria	50	2	2, 3, 6, 10, 11
Preparació d'exàmens	22	0,88	2, 3, 6, 10, 11
Realització de problemes	100	4	10, 11

Avaluació

L'assignatura té una única convocatòria que es tanca al Juliol.

- Un 30% de la nota correspon a l'avaluació continuada, no recuperable. Aquesta nota, que designarem c , s'obtindrà a partir de l'entrega i correcció de problemes, organitzada com segueix
 - Les llistes de problemes tindran identificats amb ** una sèrie de problemes. L'alumne haurà de seleccionar-ne dos entre aquests i entregar-ne la resolució mitjançant dos lliuraments per quadrimestre. Els lliuraments del primer quadrimestre son el ? i el ?. Les dates del segon quadrimestre s'anunciaran al CV. El lliurament es farà en sobre tancat adreçat al professor que s'indiqui al CV en una bústia habilitada per la Titulació de Matemàtiques. Aquests exercicis seran corregits, retornats i comentats a l'alumne en entrevistes personals, l'organització de les quals s'anunciarà al CV. Els lliuraments donaran lloc a les notes LL1; LL2; LL3; LL4.
 - En els darrers 20' de cada sessió de seminari l'alumne haurà d'intentar resoldre, individualment, un exercici relacionat amb la temàtica treballada, que serà lliurat signat al professor responsable. La mitjana de les qualificacions d'aquests exercicis donarà lloc (sempre que s'hagin fet el 75 per cent de les sessions) a una nota S_1 ; S_2 de seminari, per quadrimestre. La nota d'avaluació continuada c_1 del primer quadrimestre es la mitjana de LL1; LL2 i S_1 , mentre que la nota c_2 es la mitjana de LL3; LL4 i S_2 . La nota c es la mitjana de c_1 i c_2 .
- L'altre 70% per cent de la nota correspon als exàmens per escrit, dos per quadrimestre, organitzats com segueix:
 - A mig quadrimestre es farà un test a la classe de teoria d'una hora de durada. Anomenem t_1 la nota, sobre 10, del test del primer quadrimestre i t_2 la nota del test del segon quadrimestre.
 - Al final de cada semestre es farà un examen parcial sobre la matèria d'aquell semestre (detalls al web de la titulació). Sigui p_1 la nota, sobre 10 del primer parcial, i sigui p_2 la nota, sobre 10, del segon parcial.

Així cada semestre s'obtindrà una nota d'exàmens e_i , on

$$e_i = \text{Max} (p_i; 0.2 t_i + 0.8 p_i)$$

on $i = 1; 2$.

La nota **per parcials** de l'assignatura serà

$$N_i = 0.30 c + 0.30 e_i + 0.40 e_2.$$

Si $N_i \geq 5$, llavors l'alumne pot triar entre dues opcions:

(a) Que N_1 sigui la seva nota de l'assignatura.

(b) Presentar-se a l'examen final per millorar aquesta nota. En aquest cas l'alumne obtindrà com a mínim la nota N

$N = 0,30 c + 0,70 j$

Si $N_1 < 5$, l'alumne podrà encara presentar-se a un examen final de tota l'assignatura. Diguem j a la nota d'aquest examen i posem

$$N = 0,30 c + 0,70 j.$$

La nota final de l'assignatura és: $\text{Max}(N_1; N)$.

Nota: Es considerarà que un alumne/a s'ha presentat a l'assignatura, i per tant té una nota final, si fa un cinquanta per cent de l'avaluació continuada i dels exàmens semestrals o fa l'examen final.

Activitats d'avaluació

Títol	Pes	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Exàmens finals	70	4	0,16	2, 3, 6, 10, 11
Proves parcials i avaluació continuada	30	10	0,4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

Bibliografia

- M. Spivak. Calculus. Càlcul Infinitesimal. Ed. Reverté, Barcelona 1995.

L'assignatura de Funcions de Variable Real consisteix, essencialment, en les tres primeres parts d'aquest llibre. És un llibre altament recomanable i en ell podreu trobar problemes molt il·lustratius. Malgrat això, les nocions de funció creixent, funció decreixent, convexitat i concavitat presentades en aquest llibre seran lleugerament diferents a les que presentarem a la nostra assignatura.

- J. M. Ortega. Introducció a l'Anàlisi Matemàtica. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona 4, Bellaterra 1990.

El nostre curs consisteix en els cinc primers capítols d'aquest llibre. Tot i que el plantejament que aquí se segueix pel que fa a la introducció dels nombres reals és diferent del que farem nosaltres, aquest text us serà de molta utilitat.

- C. Perelló. Càlcul Infinitesimal, amb mètodes numèrics i aplicacions. Biblioteca Universitària, Enciclopèdia Catalana.

Aquest és un llibre molt recomanable com a obra de consulta, que d'altra banda serà útil a l'alumne per a les restants assignatures de càlcul. Amb un estil molt didàctic i singular, lluny dels manuals americans, la lectura del seus set primers capítols serà molt útil a l'alumne per a la maduració dels conceptes.

- F. Galindo i altres. Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en una variable real. Ed. Thomson, Madrid 2003.

Aquest és un llibre eminentment pràctic. Conté una gran varietat de problemes resolts de diversa dificultat i us pot ser de molta utilitat en el moment de buscar exemples o preparar les classes de problemes. Els capítols que tenen relació amb l'assignatura són el 2, el 3, el 5, el 6, el 7 i el 8. La resta us pot ajudar en assignatures com Anàlisi Matemàtica de segon curs.

- D. Pestana i altres. Curso práctico de Cálculo y Precálculo. Ariel Ciencia, Barcelona 2000.

El plantejament d'aquesta obra és similar a l'anterior, és a dir, presenta l'assignatura des d'un punt de vista més pràctic. Tot i que el nivell d'aquest llibre és inferior al que es demanarà a la nostra assignatura, les persones que tinguin dificultat en, per exemple, calcular primitives el poden fer servir com a guia.

- C. Cascante- J. Casasayas, Problemas de Análisis Matemático de una variable real, EDUNSA

Llibre recomanable per a exercitar-se en la resolució de problemes.