

Anàlisi matemàtica

2012/2013

Codi: 100094

Crèdits ECTS: 9

Titulació	Pla	Tipus	Curs	Semestre
2500149 Graduat en Matemàtiques	777 Graduat en Matemàtiques	OB	2	1

Professor de contacte

Nom: Joan Josep Carmona Domènech

Correu electrònic: JoanJosep.Carmona@uab.cat

Utilització d'idiomes

Llengua vehicular majoritària: català (cat)

Algun grup íntegre en anglès: No

Algun grup íntegre en català: Sí

Algun grup íntegre en espanyol: No

Prerequisits

Per tal que un alumne pugui cursar l'assignatura és molt important que hagi superat l'assignatura de Funcions de Variable Real de primer curs. Si aquest no és el cas, és imprescindible que, com a mínim, entengui les nocions de convergència de successions així com les de continuïtat, derivabilitat i integrabilitat de funcions. També és molt important que l'alumne tingui una suficient destresa en la manipulació de límits, infinitedims equivalents, desenvolupaments de Taylor de funcions elementals, etc.

Objectius

Per tal que un alumne superi l'assignatura entenem que és imprescindible que adquireixi les següents capacitats.

Capacitats teòriques.

1. Entendre la noció de convergència de sèries i d'integrals impròpies.
2. Conèixer els criteris més importants per decidir la convergència de sèries o integrals impròpies.
3. Entendre amb claretat el concepte de convergència uniforme d'una successió o d'una sèrie de funcions.
4. Conèixer els resultats que relacionen la convergència uniforme d'una banda i les nocions de continuïtat, derivabilitat i integrabilitat d'una altra.
5. Comprendre el guany que suposa considerar sèries de potències amb nombres complexos enlloc de sèries de funcions en general.
6. Comprendre els resultats relatius a la regularitat de les funcions definides a partir d'integrals que depenen d'un paràmetre.
7. Conèixer els resultats principals que relacionen la regularitat d'una funció i la convergència d'una sèrie de Fourier.
8. Entendre i saber reproduir les demostracions dels resultats principals de l'assignatura.

Capacitats de problemes

1. Manipular amb molta destresa els diferents criteris de què disposem per tal de decidir si una sèrie o una

integral impròpia són convergents.

2. Saber calcular el radi de convergència d'una sèrie de potències i saber sumar-les en situacions determinades.
3. Saber determinar el desenvolupament en sèrie de potències de funcions analítiques més o menys elementals.
4. Demostrar una certa destresa en el tractament de la convergència uniforme de successions i sèries de funcions.
5. Saber calcular coeficients de Fourier de funcions i ser capaç d'obtenir la suma d'algunes sèries de nombres complexos tot aplicant els resultats vistos sobre sèries de Fourier.
6. Saber relacionar els diferents resultats principals de l'assignatura en el moment d'aplicar-los a casos concrets.

D'altra banda, i pensant en la formació de l'alumne com a futur professional de la Matemàtica, creiem que les capacitats següents són importants d'adquirir.

1. Capacitat d'expressar correctament, des del punt de vista formal, qualsevol resultat.
2. Capacitat de calcular, de fer de forma rutinària determinats processos matemàtics.
3. Capacitat de conjecturar i d'imaginar estratègies per tal de confirmar o rebutjar aquestes conjectures.
4. Capacitat d'identificar objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb d'altres de coneguts i de deduir-ne propietats.

Competències

- Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
- Comprendre i utilitzar el llenguatge matemàtic
- Demostrar una elevada capacitat d'abstracció.
- Identificar les idees essencials de les demostracions d'alguns teoremes bàsics i saber-les adaptar per obtenir altres resultats
- Reconèixer la presència de les Matemàtiques en altres disciplines

Resultats d'aprenentatge

1. Conèixer la relació entre convergència uniforme i la continuïtat, la derivabilitat o la integrabilitat de funcions d'una variable.
2. Entendre els conceptes de convergència de sèrie i d'integrals així com dominar els criteris de convergència més importants.
3. Saber calcular coeficients de Fourier de funcions periòdiques i les seves possibles aplicacions immediates en càlcul de sumes de sèries.

Continguts

1. Sèries numèriques.

- 1.1 Extensió de la noció de límit d'una successió.
- 1.2 Noció de sèrie convergent.
- 1.3 Sèries de termes positius. Criteris de convergència.
- 1.4 Convergència absoluta i convergència condicional.
- 1.5 Criteris de Leibniz, de Dirichlet i d'Abel.
- 1.6 Reordenació de sèries

2. Convergència uniforme i sèries de potències.

- 2.1 Successions de funcions.
- 2.2 Convergència puntual i uniforme.
- 2.3 Convergència uniforme i continuïtat, derivabilitat i integrabilitat.
- 2.4 Sèries de funcions.
- 2.5 Criteri M de Weierstrass.
- 2.6 Existència de funcions contínues no derivables enlloc.
- 2.7 Sèries de potències i radi de convergència.
- 2.8 Teorema d'Abel.
- 2.9 Funcions analítiques.
- 2.10 Aproximació de funcions contínues per polinomis: el teorema de Weierstrass.

3. Sèries de potències complexes.

- 3.1 Funcions de variable complexa.
- 3.2 Continuïtat i derivabilitat de funcions de variable complexa. La noció de funció holomorfa.
- 3.3 Teorema fonamental de l'Àlgebra.
- 3.4 Sèries de nombres complexos.
- 3.5 Sèries de potències.
- 3.6 L'exponencial complexa i les funcions trigonomètriques.

4 Sèries de Fourier.

- 4.1 L'espai de funcions de quadrat integrable.
- 4.2 Polinomis trigonomètrics. Coeficients de Fourier. Sèries de Fourier.
- 4.3 Convergència puntual i uniforme d'una sèrie de Fourier.
- 4.4 Comportament d'una sèrie de Fourier al voltant d'una discontinuïtat de salt. El fenomen de Gibbs
- 4.5 Identitat de Parseval.

5. Integrals impròpies.

- 5.1 Extensió de la noció d'integral de Riemann per a funcions o intervals no acotats.
- 5.2 Convergència d'integrals impròpies.
- 5.3 Criteris de convergència per a funcions positives.
- 5.5 Continuïtat i derivabilitat de funcions de diverses variables.
- 5.6 Integrals depenents d'un paràmetre.
- 5.7 La funció Gamma d'Euler. El teorema de Stirling.

Metodologia

El procés d'aprenentatge de la matèria s'ha de basar essencialment en el treball personal de cada alumne, sabent que disposa de l'ajut dels professors que imparteixen les hores presencials. Per això les explicacions teòriques i l'ajut del professor són importants en aquesta assignatura. Amb les noves directrius dels plans d'estudi les hores presencials de l'alumnat s'han reduït. Per tant remarcuem la importància de l'assistència dels alumnes **a totes** les classes teòriques, de problemes i a les pràctiques i el fet que l'alumne haurà de complementar les explicacions del professor amb l'estudi personal autònom per tal d'assimilar els conceptes, les demostracions, els procediments i les tècniques de resolució de problemes. Així mateix ressaltem que és molt profitós que l'alumne vagi a consultar durant les hores de tutoria i que s'acostumi a fer-ho regularment.

Les hores presencials d'activitats dirigides es distribueixen en:

Teoria:

es tracta de classes en les quals el professor introdueix els conceptes bàsics i les demostracions corresponents a la matèria de l'assignatura, tot mostrant exemples de la seva aplicació, tenint en compte els assistents i adequant-se al seu nivell. La teoria es fa en un sol grup. Aquestes classes es fan amb pissarra i guix de forma tradicional.

Problemes:

les classes de problemes es fan en dos grups i en elles es treballa la comprensió dels conceptes introduïts a

teoria amb la realització de problemes. Donades les poques sessions disponibles (en concret 14 hores) serà fonamental que l'alumne hagi pensat i reflexionat sobre els problemes amb anterioritat a l'hora de classe. Es fomentarà la participació activa dels alumnes en aquestes classes. Aquests problemes seran d'unes llistes que s'hauran facilitat a l'alumne prèviament. El fet de pensar i resoldre problemes es considera imprescindible per assimilar satisfactòriament els conceptes i resultats de l'assignatura. El grup 1 de problemes està integrat per les persones que el primer cognom comença per una lletra que està entre A i K, ambdues incloses i els que cursen els estudis de grau en Física i Matemàtiques. El grup 2 està format per les persones que el primer cognom comença entre la lletra L i la Z ambdues incloses. Per qüestions docents es prega que cada persona vagi al grup que pertany.

Pràctiques als seminaris:

Les sessions de seminaris es dedicaran a la realització d'activitats dirigides al domini de les tècniques que són pròpies de l'assignatura. Seran, doncs, sessions de caràcter pràctic. En aquestes seran els alumnes els que faran a l'aula els exercicis. Aquestes pràctiques es fan en blocs de dues hores i estan programades 7 sessions que es fan els dimarts 2, 16 i 30 d'octubre, 20 de novembre, 4 i 18 de desembre i el 8 de gener. En la part final de tres de les sessions de pràctiques cada alumne haurà de realitzar un qüestionari individual que serà lliurat al professor corresponent. Aquest qüestionari seran avaluable.

El Campus Virtual.

S'obrirà una aplicació d'aquesta assignatura al Campus Virtual de la universitat per tal de subministrar tot el material i tota la informació relativa a aquesta assignatura que li calgui a l'estudiant. En particular estarà la darrera versió actualitzada de la guia docent. És important que l'alumne accedeixi a aquesta plataforma amb certa freqüència i de forma regular.

Activitats formatives

Títol	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Tipus: Dirigides			
Realització de proves parcials	2	0,08	1, 2
Realizació exàmens finals	4	0,16	1, 2, 3
Sessions de problemes	14	0,56	1, 2, 3
Sessions de seminaris	14	0,56	1, 2, 3
Sessions de teoria	42	1,68	1, 2, 3
Tipus: Supervisades			
Tutories	4	0,16	
Tipus: Autònomes			
Estudi dels conceptes teòrics i dels principals resultats de l'assignatura	46	1,84	1, 2, 3
Preparació d'exàmens	30	1,2	1, 2, 3
Preparació de treball dirigit	4	0,16	1, 2, 3
Resolució de problemes i exercicis	60	2,4	1, 2, 3

Avaluació

L'objectiu del procés d'avaluació és verificar que els alumnes han assolit els coneixements i han adquirit les

habilitats definides en els objectius de l'assignatura, així com les competències. Aquest és el punt essencial del procés d'aprenentatge. Amb els instruments d'avaluació proposats s'intenta fer un equilibri entre la necessitat d'obrar de forma justa i les disponibilitats de realització. Al mateix temps es persegueix l'objectiu que l'avaluació sigui feta de forma continuada.

Instruments d'avaluació. En la part final de les sessions de pràctiques dels dies **30 d'octubre, 4 de desembre i 8 de gener**, cada alumne haurà de realitzar un qüestionari sobre el contingut de la pràctica que serà lliurat al professor corresponent. De totes aquestes avaluacions l'alumne tindrà una nota PA, entre 0 i 10. El dimecres **7 de novembre** (tarda) es farà una prova d'avaluació escrita amb qüestions teòriques i pràctiques de tres hores de duració. L'alumne obtindrà una nota A1, també entre 0 i 10. El dimarts **22 de gener del 2013** (acabat el període de classes presencials) es farà un examen de qüestions teòriques i pràctiques del qual s'obtindrà una nota A2. Durant el mes de desembre cada alumne rebrà un qüestionari individual que haurà de lliurar al professor i de la correcció obtindrà una nota P. Amb aquest procediment la nota es calcula:

$$\text{NOTA(1)} = (15 \cdot \text{PA} + 5 \cdot \text{P} + 25 \cdot \text{A1} + 55 \cdot \text{A2}) / 100.$$

L'assistència a les classes presencials podrà arrodonir la nota de forma favorable per l'alumne.

L'assignatura es considerarà aprovada si $\text{NOTA(1)} \geq 5$. En cas contrari l'alumne tindrà la possibilitat de fer un examen complet (**7 de febrer**) del qual tindrà una nota R, la qual donarà la nota

$$\text{NOTA(2)} = (15 \cdot \text{PA} + 5 \cdot \text{P} + 80 \cdot \text{R}) / 100.$$

L'assignatura serà superada si $\text{NOTA(2)} \geq 5$. A la segona oportunitat podran presentar-se també aquells que vulguin optar a pujar la NOTA(1) . En aquest cas sempre s'assignarà la més gran de NOTA(1) i NOTA(2) .

Es considerarà presentat a l'assignatura i se l'assignarà nota a aquella persona que s'hagi presentat a l'avaluació segona (o sigui la A2) o la recuperació.

Activitats d'avaluació

Títol	Pes	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Avaluació continuada	20	0	0	1, 2, 3
Examen final	55	4	0,16	1, 2, 3
Prova parcial 1	25	1	0,04	1, 2, 3

Bibliografia

1. F. Galindo i altres. *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en una variable real*. Ed. Thomson, Madrid 2003.

Aquest és un llibre eminentment pràctic. Conté una gran varietat de problemes resolts de diversa dificultat i us pot ser de molta utilitat en el moment de buscar exemples o preparar les classes de problemes. Us seran útils els capítols 9 i 10.

2. J. M. Ortega. *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica*. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona 4, Bellaterra 1990.

La major part del nostre curs consisteix en els tres darrers capítols d'aquest llibre. Serà el text de referència de

la nostra assignatura.

3. C. Perelló. *Càlcul Infinitesimal: amb mètodes i aplicacions*. Enciclopèdia Catalana, Barcelona, 1994.

Aquest text us aportarà punts de vista molt interessants sobre el contingut de l'assignatura. És un llibre de Matemàtiques molt agradable de llegir.

4. W. Rudin. *Principios de Análisis Matemático*. McGraw-Hill, Mèxic, 1981.

Aquest llibre us serà útil, principalment, quan tractem el tema de Sèries de Fourier.

5. M. Spivak. *Calculus. Càlcul Infinitesimal*. Ed. Reverté, Barcelona 1995.

Podeu consultar els capítols 22, 23, 25 i 26. És un llibre altament recomanable i en ell podreu trobar problemes molt il·lustratius i molt interessants.

5. G. P. Tolstov. *Fourier Series*, Dover Publications, New York, 1976.

Està dedicat a l'estudi de les sèries de Fourier. En el curs solament veurem una part dels 4 primers capítols.