

**Funcions de variable real**

Codi: 100087  
Crèdits: 12

Titulació	Tipus	Curs	Semestre
2500149 Matemàtiques	FB	1	A

**Professor de contacte**

Nom: Juan Jesús Donaire Benito  
Correu electrònic: JuanJesus.Donaire@uab.cat

**Utilització d'idiomes a l'assignatura**

Llengua vehicular majoritària: català (cat)  
Grup íntegre en anglès: No  
Grup íntegre en català: Sí  
Grup íntegre en espanyol: No

**Equip docent**

Josep Maria Burgués Badía  
Francesc Mañosas Capellades  
Joan Orobitg Huguet  
Joan Torregrosa Arús  
José González Llorente  
Juan Carlos Cantero Guardado

**Prerequisits**

Per tal que un alumne pugui seguir l'assignatura amb normalitat és imprescindible que tingui una certa destresa en la manipulació algebraica de fraccions, expressions que continguin arrels i potències, resolució de sistemes lineals i aritmètica bàsica de números i polinomis. També és molt aconsellable que l'estudiant tingui coneixements de trigonometria. Finalment, és d'esperar que l'estudiant pugui fer, sense gaire dificultat, la representació gràfica de funcions relativament senzilles d'una variable. Pressuposem també que la persona que cursa aquesta assignatura està familiaritzada amb raonaments de tipus lògic i que sap negar frases o proposicions

El requisit més important és, però, una gran curiositat per entendre i aprofundir en els conceptes que s'estudiaran.

**Objectius**

A nivell de coneixements, l'objectiu de l'assignatura és que l'estudiant aprengui sòlidament els conceptes bàsics del Càlcul Infinitesimal: les funcions de variable discreta (successions) o contínua, el concepte de canvi (límits, derivades) i la teoria d'integració. A nivell de competències, també és un objectiu bàsic assolir una certa destresa en la manipulació i càlcul de límits, derivades i integrals i saber aplicar els teoremes fonamentals d'aquesta teoria. Finalment, hi ha també un objectiu formatiu de caràcter genèric: que l'alumne comenci a desenvolupar la capacitat d'anàlisi i de raonar rigorosament.

## Competències

- Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
- Calcular, reproduir determinades rutines i processos matemàtics amb agilitat
- Comprendre i utilitzar el llenguatge matemàtic
- Desenvolupar un pensament i un raonament crític i saber comunicar-ho de manera efectiva, tant en les llengües pròpies com en una tercera llengua
- Formular hipòtesis i imaginar estratègies per confirmar-les o refutar-les.
- Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
- Utilitzar aplicacions informàtiques d'anàlisi estadística, càlcul numèric i simbòlic, visualització gràfica, optimització o altres per experimentar en Matemàtiques i resoldre problemes

## Resultats d'aprenentatge

1. Assimilar els conceptes i els objectes matemàtics propis de l'assignatura, que apareixen als seus continguts.
2. Calcular derivades de funcions mitjançant la regla de la cadena, el Teorema de la Funció Implícita, etc.
3. Calcular i estudiar extrems de funcions.
4. Calcular integrals de funcions d'una variable.
5. Demostrar el coneixement dels objectes propis del càlcul amb funcions d'una variable real i de les seves propietats i utilitats.
6. Desenvolupar estratègies autònomes per la resolució de problemes com identificar el camp de problemes propis del curs, discriminar els problemes rutinaris dels no rutinaris, dissenyar una estratègia a priori per resoldre un problema, avaluar la estratègia i modificar-la si cal i traduir en el context d'un problema concret resultats teòrics que poden ser útils per resoldre'l.
7. Desenvolupar un pensament i un raonament crític i saber comunicar-ho de manera efectiva, tant en les llengües pròpies com en una tercera llengua
8. Llegir i comprendre un text de matemàtiques del nivell del curs.
9. Manipular desigualtats i successions, analitzar i dibuixar funcions, deduir propietats d'una funció a partir del gràfic, comprendre i treballar intuïtivament, geomètricament i formalment amb les nocions de límit, derivada i integral.
10. Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
11. Resoldre problemes que impliquen el plantejament d'integrals (longituds, àrees, volums, etc.)
12. Seguir i comprendre una explicació oral d'un tema de matemàtiques relacionat amb el curs.

## Continguts

El programa de l'assignatura està organitzat en sis capítols:

### I. La recta real.

- Els nombres racionals i la seva incompletitud.
- Suprem i ínfim d'un conjunt.
- El concepte de nombre real. Axiomàtica. Expressió decimal.
- Operacions i desigualtats entre nombres reals.
- Nombres reals distingits:  $\pi$  i  $e$

### II. Successions de nombres reals.

- Funcions reals de variable discreta o contínua
- Límit d'una successió. Propietats algebraiques.

- Successions monòtones.
- Punts d'acumulació. Successions parcials.
- El Teorema de Bolzano-Weierstrass.
- Successions de Cauchy i reenunciat de l'axioma de completitud.
- Càlcul de límits.

### III. Continuïtat de funcions.

- Funcions de variable real. Domini d'una funció.
- Funcions polinòmiques, racionals, exponencials i trigonomètriques vs funcions experimentals.
- Límit d'una funció en un punt, límits laterals. Propietats bàsiques dels límits. Asímtotes.
- Continuïtat d'una funció.
- Teorema de Bolzano, localització d'arrels.
- Teorema dels valors intermedis i Teorema de Weierstrass.
- Funcions monòtones. Funcions inverses.

### IV. Càlcul diferencial.

- Derivada d'una funció en un punt com a taxa instantània de variació: interpretació geomètrica.
- La funció derivada. Caracterització de les funcions constants.
- Propietats algebraïques de la derivada.
- Regla de la cadena. Derivació de la funció inversa.
- Extrems absoluts i relatius d'una funció.
- Teorema de Rolle. Teorema del valor mitjà.
- Aproximació de zeros de funcions. Obtenció de desigualtats. Regla de l'Hôpital.

### V. Aproximació per polinomis de Taylor.

- Ordre de contacte entre funcions.
- Polinomi de Taylor. Propietats.
- Polinomis de Taylor de funcions elementals.
- La fórmula de Taylor com a aproximació local.
- Convexitat de funcions. Convexitat i continuïtat.
- Estudi local d'una funció.

### VI. Integral de Riemann.

- El problema de l'àrea.
- Sumes superiors i inferiors de funcions acotades.
- Funcions integrables. Integral.
- La integral com un procés de sumació per pas al límit. Integrabilitat.
- El Teorema Fonamental del Càlcul.
- Càlcul d'integrals mitjançant el càlcul de primitives. El Teorema del canvi de variable i la fórmula d'integració per parts.
- Aplicacions geomètriques de la integral.
- Densitats, masses i centres de masses.

## Metodologia

L'assignatura disposa de dos grups de teoria, dos grups de problemes i quatre grups de seminari-pràctiques. El grup al qual pertany l'estudiant es pot consultar a la web de la titulació <http://mat.uab.cat/gmat>.

Es duran a terme dues sessions d'una hora a la setmana de teoria i dues sessions de problemes. Aquests seminaris es destinaran al treball en grup tutoritzat.

Els horaris i aules hauran de consultar-se a la web de la titulació.

Al Moodle de l'assignatura, l'estudiant tindrà a la seva disposició el material necessari per seguir totes les sessions. Allà podran trobar-se, apunts, llistes de problemes, observacions que faci el professorat o les notícies que puguin ser rellevants per al desenvolupament de l'assignatura.

Classes de teoria. El professor anirà desenvolupant els temes del programa en l'ordre indicat. **És bàsic que l'estudiant treballi regularment**, utilitzant els llibres de text que s'indiquen a la bibliografia o els apunts de classe. A vegades el professor deixarà a càrrec de l'alumne completar les demostracions d'alguns resultats, feina que s'haurà de fer individualment amb l'ajut dels llibres de text i utilitzant les hores de tutoria.

Classes de problemes. Es distribuïran tres llistes de problemes cada quadrimestre que, com s'ha dit abans, estaran disponibles al Moodle. A la classe de problemes els professors resoldran o donaran indicacions sobre alguns dels problemes de les llistes a la pissarra, però no tots, per això és essencial que l'alumne realitzi un treball individual amb regularitat a partir de les llistes. Pensar-se els problemes, encara que no surtin, i dedicar-hi temps és essencial per poder enfrontar-se a aquesta assignatura amb garanties.

Seminaris. Els seminaris són activitats de treball en grup sota la supervisió d'un professor tutor. Cada sessió seguirà un guió que es distribuirà també a la classe. Dels vuit seminaris del curs, quatre d'ells (dos al primer quadrimestre i dos al segon) incorporaran una activitat avaluable. Les dates dels seminaris evaluables s'anunciaran al Moodle amb antelació suficient. Per tal de mantenir l'equilibri entre grups, és **important** que els alumnes vagin al grup de problemes i seminaris que els hagi estat assignat. Només s'admetran canvis en situacions excepcionals o justificades.

Finalment, es recorda que els alumnes disposaran d'unes hores de tutoria al despatx dels professors de teoria, de problemes i de seminaris, on podran consultar dubtes i demanar tota mena d'ajut en el seu treball. L'horari per a cada professor serà anunciat al Moodle.

## Activitats formatives

Títol	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
<b>Tipus: Dirigides</b>			
Classes de teoria	59	2,36	
<b>Tipus: Supervisades</b>			
Activitats tutoritzades	25	1	
Classes de problemes	30	1,2	
<b>Tipus: Autònomes</b>			
Estudi de teoria	50	2	
Preparació d'exàmens	22	0,88	
Realització de problemes	100	4	

## Avaluació

L'assignatura té una única convocatòria que es tanca al Juliol.

- Hi haurà dues proves curtes, una per quadrimestre, que proporcionaran una qualificació **T**.
- Quatre dels seminaris (dos al primer quadrimestre i dos al segon) inclouran una activitat avaluable. Els seminaris evaluables proporcionaran una qualificació **S**.

- Hi haurà dues proves parcials a final de cada quadrimestre amb qualificacions **P1, P2**.

A partir d'aquestes activitats s'obtindrà una nota d'avaluació continuada **C**, donada per

$$C = 0,15 T + 0,15 S + 0,35 P1 + 0,35 P2$$

Finalment la qualificació de juny serà

$$J = \text{Max}\{ C , 0,5 P1 + 0,5 P2 \}$$

Si **J** és superior o igual a **5**, l'alumne ha superat l'assignatura. Els alumnes que no hagin superat l'assignatura o aquells que vulguin millorar la seva qualificació podran presentar-se a una prova de recuperació o de millora denota, amb continguts de tota l'assignatura. Si **R** és la nota d'aquesta examen, la qualificació final del curs **F** serà

$$F = \text{Max}\{J , R\}$$

Les matrícules d'honor podran atorgar-se, en una primera fase, d'acord amb la qualificació **J**. A partir de la qualificació **F** podran atorgar-se matrícules d'honor addicionals.

**Nota:**Es considerarà que un alumne/a s'ha presentat a l'assignatura si fa els dos exàmens parcials. En cas contrari, la qualificació serà "No presentat".

## Activitats d'avaluació

Títol	Pes	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Exàmens finals	70	4	0,16	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
Proves parcials i avaluació continuada	30	10	0,4	

## Bibliografia

### BIBLIOGRAFIA BÀSICA

M. Spivak. Calculus. Càlcul Infinitesimal. Ed. Reverté, Barcelona 1995.

L'assignatura de Funcions de Variable Real consisteix, essencialment, en les tres primeres parts d'aquest llibre. És un llibre altament recomanable, molt ben escrit i inclou problemes molt il·lustratius. L'ordre seguit i alguns detalls referents a algunes nocions poden diferir lleugerament de les que presentarem al curs.

### BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTÀRIA

- R. Larson, R. P. Hostetler, B. Edwards. Cálculo I. Ediciones Pirámide. 2002.

Un llibre amb un enfocament més pràctic. Conté nombrosos exemples, aplicacions i problemes.

- J. M. Ortega. Introducció a l'Anàlisi Matemàtica. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona 4, Bellaterra 1990.

El nostre curs consisteix en els cinc primers capítols d'aquest llibre. Aquest text serà d'utilitat en alguns aspectes del curs com a complement de la referència bàsica.

- W. Rudin. Principios de Análisis Matemático. Ed. McGraw-Hill. 1980.

Llibre de contingut més avançat que serà útil també en cursos posteriors. Molt bona selecció de problemes.

- R. Courant, H. Robbins. ¿Qué es la matemática? Aguilar, 1979.

Un clásico. Un libro de contenido más general que proporciona una magnífica visión global de la matemática.

- G. Flory. Ejercicios de topología y de análisis. Tomos 1, 2. Ed. Reverté, 1983.

Bons llibres de problemes de tipus més conceptual. Las parts que corresponen aaquest curs són el capítol 1 del volum 1 i els capítols 5, 6, 7 del volum 2. Es tracta de llibres que seran útils també en cursos posteriors.

- B.P. Demidovich. 5000 problemas de Análisis Matemático. Paraninfo. 2000.

Llibre amb una completa selecció de problemes pràctics. Molt adient per exercitar conceptes i afiançar destresa de càlcul.