

Geometria diferencial

Codi: 100107
Crèdits: 12

Titulació	Tipus	Curs	Semestre
2500149 Matemàtiques	OB	3	2

Professor de contacte

Nom: Agustí Reventós Tarrida

Correu electrònic: Agustí.Reventos@uab.cat

Utilització d'idiomes a l'assignatura

Llengua vehicular majoritària: català (cat)

Grup íntegre en anglès: No

Grup íntegre en català: Sí

Grup íntegre en espanyol: No

Equip docent

Eduardo Gallego Gómez

Gregori Guasp Balaguer

Gil Solanes Farrés

Prerequisits

Per assimilar tots els continguts de l'assignatura s'ha de tenir un coneixement previ de càlcul en diverses variables (derivació, integració, teorema de la funció implícita), d'equacions diferencials (teorema d'existència i unicitat de solucions), d'àlgebra i geometria lineals (diagonalització d'endomorfismes autoadjunts, formes quadràtiques, còniques i quàdriques) i de topologia (homeomorfisme, índex d'una corba plana, característica d'Euler).

Objectius

Els conceptes i nocions de la geometria diferencial i del càlcul vectorial són bàsics per a la comprensió de la realitat física que ens envolta. També són importants les seves aplicacions tècniques en el camp de l'enginyeria, on els objectes d'estudi es poden representar geomètricament per elements no lineals de l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$, és a dir, bàsicament per corbes i superfícies.

L'objectiu principal és conèixer quines són les nocions geomètriques que permeten caracteritzar de manera teòrica la forma d'aquests elements (curvatura i torsió en el cas d'una corba, primera i segona forma fonamental en el cas d'una superfície), així com desenvolupar mètodes de càlcul de les seves característiques mètriques (longitud, àrea, etc.). També és important relacionar els invariants associats a una corba continguda en una superfície amb les nocions i magnituds pròpies d'aquesta última. Aquestes propietats seran tractades en els dos primers blocs de l'assignatura.

En el tercer bloc del curs s'introduiran les nocions clàssiques del càlcul vectorial: camps vectorials i les seves integrals de línia i de superfície, així com els teoremes integrals de Green, Gauss i Stokes que les relacionen. Aquests resultats s'obtindran com a conseqüència del teorema de Stokes per a formes diferencials. Es presentaran nombroses aplicacions d'aquests teoremes, tant a la física com a la geometria.

Competències

- Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
- Demostrar una elevada capacitat d'abstracció.
- Identificar les idees essencials de les demostracions d'alguns teoremes bàsics i saber-les adaptar per obtenir altres resultats
- Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
- Que els estudiants sàpiguen aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseeixin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.
- Reconèixer la presència de les Matemàtiques en altres disciplines
- Utilitzar aplicacions informàtiques d'anàlisi estadística, càlcul numèric i simbòlic, visualització gràfica, optimització o altres per experimentar en Matemàtiques i resoldre problemes

Resultats d'aprenentatge

1. Aplicar les integrals de línia i superfície per reconèixer algunes propietats globals de corbes i superfícies.
2. Entendre les aplicacions del càlcul vectorial i de la geometria diferencial a problemes de la física.
3. Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
4. Que els estudiants sàpiguen aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseeixin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.
5. Reconèixer la naturalesa dels punts d'una corba en R^3 . Càlcul de curvatura i torsió.
6. Reconèixer la naturalesa dels punts d'una superfície en R^3 . Càlcul de la curvatura de Gauss, curvatura mitjana i curvatures principals.
7. Reconèixer topològicament les superfícies compactes i la seva classificació.
8. Saber plantejar i resoldre integrals curvilínies i integrals de superfície.
9. Usar algun tipus de programari científic per realitzar càlculs i visualitzar superfícies

Continguts

1. Corbes

- Parametritzacions i longitud.
- Curvatura i torsió. Fórmules de Frenet.
- Esfera osculatriu.

2. Superfícies.

- Superfícies regulars.
- Primera forma fonamental.
- Aplicació de Gauss i segona forma fonamental.
- Curvatura normal i curvatura geodèsica.
- Geometria intrínseca. Teorema egregi.
- Geodèsiques.
- Teorema del defecte.

3. Càlcul vectorial.

- Formes diferencials.
- Varietats i varietats amb vora.
- Integració.
- Teorema de Stokes i aplicacions.
- Teorema de Gauss-Bonnet.

Metodologia

Cada setmana lectiva del curs es faran 3 sessions de 1 hora de teoria, 2 sessions de 1 hora de problemes i 1 sessió de 2 hores de seminari.

Com a norma general, a les classes de teoria s'introduiran primer els conceptes i després s'il·lustraran amb exemples abundants.

Respecte a les classes de problemes, el primer que cal és que l'alumne pensi els problemes que se li proposen a les llistes. La situació ideal consisteix a anar a classe de problemes amb els problemes fets o estudiats en hores d'estudi. És poc útil observar com un altre persona fa els problemes; és com aprendre a tocar el piano veient com ho fa un altre!

Les sessions de seminari estan principalment dedicades a desenvolupar alguns temes per part de l'alumne, però també a aprofundir de forma autònoma en les qüestions tractades a classe de teoria. La dinàmica que proposem és la següent. Abans de la realització de cada sessió de seminari els professors faran públic un guió en el qual figurin els objectius de la sessió i una llista d'exercicis i observacions pautades a fi d'arribar-hi. Els alumnes l'hauran de llegir amb atenció i podran fer les cerques bibliogràfiques que considerin oportunes per tal de resoldre els exercicis proposats. Durant la sessió els professors poden resoldre dubtes puntuals però no faran exposicions magistrals. En finalitzar cada sessió els professors informaran als alumnes si han d'entregar un informe per escrit amb la resolució d'algunes de les qüestions formulades. Es demanarà un màxim de 5 informes de les 15 sessions de seminaris.

Al llarg del curs es farà una prova parcial per tal que l'alumne sàpiga si està assolint els objectius proposats i en cas necessari poder modificar tot allò que no funciona.

Un dels millors consells per gaudir del que es fa a classe és estudiar cada dia. Si portem al dia el temari, les classes són més interessants i s'aprofiten més. Sobretot cal que els estudiants tinguin una actitud activa a classe, intentant seguir les explicacions i preguntant sempre que calgui. En tot cas el professor també podrà posar qüestions als alumnes per tal de poder decidir sobre l'adequat ritme del curs.

És important que l'alumne sigui capaç de prendre la iniciativa fent ús de la biblioteca. Alguns conceptes poden quedar més clars si veiem els punts de vista d'altres autors. Aconsellem també l'ús del manipulador algebraic Maple per alleugerir alguns càlculs rutinaris i sobretot per obtenir representacions gràfiques que ajudin a l'alumne visualitzar tot tipus d'objectes geomètrics. Existeix una llicència de campus d'aquest programa. També es poden consultar recursos disponibles a internet, alguns dels quals es suggeriran a classe.

Per últim, cal que l'alumne s'esforci a utilitzar correctament el llenguatge matemàtic. En aquest moment de la seva formació hauria de consolidar la capacitat d'expressar amb precisió conceptes i raonaments. En particular, serà important que aprengui a transformar les intuïcions geomètriques en arguments rigurosos. Aquestes habilitats es treballaran de forma intensiva a les classes de problemes i als seminaris.

Activitats formatives

Títol	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Tipus: Dirigides			
Classes de problemes	30	1,2	
Classes de teoria	45	1,8	
Tipus: Supervisades			
Classes de seminari	28	1,12	
Tipus: Autònomes			

Avaluació

L'avaluació es farà tenint en compte l'assimilació dels continguts teòrics i pràctics de l'assignatura així com el treball continuat al llarg del curs. La quantificació d'aquestes dades es farà mitjançant els indicadors donats per les notes següents (totes elles normalitzades sobre 10):

- Avaluació continuada.
 - Entrega d'exercicis (provinents de les classes de problemes o dels seminaris). Sigui P la qualificació resultant.
- Proves escrites

A mitjans del semestre es realitzarà un examen parcial. Sigui PP (primer parcial) la nota d'aquest examen.

Un cop acabat el període lectiu, es realitzarà un segon examen parcial on s'avaluaran essencialment els continguts de la segona part del curs, tot i que, com és normal en matemàtiques, poden aparèixer exercicis i sobre tot conceptes de la primera part del curs. Sigui SP (segon parcial) la nota d'aquest examen.

La nota N de l'assignatura es calcularà amb la fórmula següent:

$$N = 0,2 P + PB$$

on

$$PB = \max(80\%SP, 50\%SP + 30\%PP)$$

En cas que aquesta nota N sigui inferior a 5, o bé si l'alumne desitja renunciar a la nota obtinguda en les proves escrites, s'optarà a un examen de reavaluació. Si R és la nota resultant d'aquest examen, la nota definitiva de l'assignatura serà

$$N = 0,2 P + 0.8 R$$

Un cop coneguts els resultats de l'examen final i abans de la realització de l'examen de reavaluació, s'assignaran les Matrícoles d'Honor en els casos que es consideri oportú. Després de l'examen de reavaluació, s'acabaran d'adjudicar les Matrícoles d'Honor que hi hagi disponibles, sempre a criteri dels professors.

Es considerarà No Presentat aquell alumne que no hagi realitzat l'examen final ni l'examen de reavaluació.

Activitats d'avaluació

Títol	Pes	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Examen de reavaluació	0.8	4	0,16	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9
Examen final	0.6	4	0,16	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Lliurament de problemes i pràctiques	0.2	0	0	
Primer parcial	0.2	4	0,16	

Bibliografia

Manfredo P. do Carmo. Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza Editorial.

Joan Girbau. Geometria diferencial i relativitat. Manuals de la UAB.

Michael Spivak. Cálculo en Variedades. Ed. Reverté.

Sebastián Montiel i Antonio Ros. Curvas y superficies. Proyecto Sur.