

Geometria Riemanniana

Codi: 100115
Crèdits: 6

Titulació	Tipus	Curs	Semestre
2500149 Matemàtiques	OT	4	0

Professor/a de contacte

Nom: Florent Balacheff

Correu electrònic: Florent.Balacheff@uab.cat

Utilització d'idiomes a l'assignatura

Llengua vehicular majoritària: català (cat)

Grup íntegre en anglès: No

Grup íntegre en català: Sí

Grup íntegre en espanyol: No

Prerequisits

Per a un bon seguiment de l'assignatura es recomana una bona assimilació dels conceptes introduïts a l'assignatura Geometria Diferencial.

També s'utilitzaran coneixements d'anàlisi (Càlcul en diverses variables i optimització), de topologia (Topologia) i d'equacions diferencials (Equacions Diferencials i Modelització I).

Objectius

Una varietat de Riemann és una varietat diferenciable amb un producte escalar definit a l'espai tangent de cada punt. La geometria riemanniana s'ocupa d'estudiar aquests objectes i va néixer com una generalització de la geometria intrínseca de les superfícies. Més tard va mostrar-se com una eina ideal per a la formulació de la mecànica clàssica i sobretot de la teoria general de la relativitat. Més recentment ha jugat un paper decisiu en la demostració de la conjectura de Poincaré.

Les dues nocions fonamentals en geometria riemanniana són la de curvatura i la de geodèsica. L'objectiu fonamental del curs és comprendre, geomètricament i fins on sigui possible, la interrelació entre aquestes dues nocions. En aquest sentit es considerarà l'efecte de la curvatura sobre el comportament de les geodèsiques i sobre la topologia de les varietats.

A Riemannian manifold is a differentiable manifold endowed with a scalar product in the tangent space at each point. Riemannian geometry is the study of Riemannian manifolds and first appears as a generalization of the intrinsic geometry of surfaces. Later it turns out to be the perfect paradigm where classical mecanic and general relativity can be formulated. More recently this topic was decisive in the proof of Poincaré's conjecture albeit the topological nature of this conjecture.

The two main notions in Riemannian geometry are curvature and geodesics. The main objective of this course is to understand, geometrically and as far as possible, the interconnexion between these two notions. In particular we will analyze the effect of curvature on geodesics and on the topology of manifolds.

Competències

- Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
- Demostrar una elevada capacitat d'abstracció.
- Formular hipòtesis i imaginar estratègies per confirmar-les o refutar-les.

- Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
- Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
- Que els estudiants tinguin la capacitat de reunir i interpretar dades rellevants (normalment dins de la seva àrea d'estudi) per emetre judicis que incloguin una reflexió sobre temes rellevants d'índole social, científica o ètica.
- Utilitzar eficaçment bibliografia i recursos electrònics per obtenir informació

Resultats d'aprenentatge

1. Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
2. Comprendre el llenguatge abstracte i conèixer demostracions rigoroses d'alguns teoremes de geometria i topologia avançades.
3. Idear demostracions de resultats matemàtics de l'àrea de geometria i topologia.
4. Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
5. Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
6. Que els estudiants tinguin la capacitat de reunir i interpretar dades rellevants (normalment dins de la seva àrea d'estudi) per emetre judicis que incloguin una reflexió sobre temes rellevants d'índole social, científica o ètica.
7. Utilitzar eficaçment bibliografia i recursos electrònics per obtenir informació

Continguts

1. Varietats de Riemann.

Varietats diferenciables. Espai tangent. Varietats de Riemann.

2. Geodèsiques.

Geodèsiques. Aplicació exponencial. Lema de Gauss. Teorema de Hopf-Rinow.

3. Curvatura.

Curvatura. Camps de Jacobi. Teorema de Hadamard. Teorema de Bonnet-Schoenberg-Myers. Teorema de Loewner.

4. Geometria hiperbòlica.

Metodologia

L'assignatura disposa de dues hores setmanals de classe de teoria i una de problemes. A més, al llarg del curs hi haurà tres seminaris de dues hores cadascun.

A les classes de teoria s'introduiran les nocions fonamentals de la geometria riemanniana i es presentaran els resultats més importants de la teoria. Així mateix, es donaran les eines necessàries per a la comprensió i resolució de problemes.

A les classes de problemes s'aprofundirà en l'assimilació i es millorarà la comprensió dels conceptes desenvolupats a les classes teòriques mitjançant la resolució de problemes teòrics i d'exercicis destinats a incrementar la destresa dels alumnes en els càlculs propis de la matèria. Aquest treball es durà a terme mitjançant les explicacions fetes pel professor a la pissarra i la participació activa dels estudiants en la discussió dels diferents arguments emprats per tal de solucionar els problemes. Les llistes de problemes seran lliurades als alumnes al llarg del quadrimestre.

Els seminaris es dedicaran a aprofundir en qüestions tractades a les classes de teoria i problemes. Els estudiants rebran un guió amb anterioritat a la realització de cada seminari. Durant la sessió, hauran de treballar de manera autònoma, si bé podran ser assessorats pels professors. Posteriorment, entregaran la solució als problemes treballats durant el seminari. Aquestes solucions seran corregides pels professors, donant lloc a una part de la nota d'avaluació continuada.

Paral·lelament, cada alumne elaborarà un treball sobre un tema escollit entre una llista proposada pels professors. Aquest treball s'entregarà per escrit, a més d'exposar-se a classe. La valoració d'ambdós aspectes (escrit i oral) també formarà part de l'avaluació continuada.

Es preveuen tutories individuals, o en grups reduïts, dels alumnes que ho desitgin en el despatx del professor. Al final l'alumne haurà rebut a les classes de teoria i problemes, així com als seminaris, tota la informació necessària (tant els enunciats com les seves demostracions), per afrontar la prova parcial tal com la prova final. Aquesta assignatura també oferirà recursos mitjançant el Campus Virtual.

Activitats formatives

Títol	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Tipus: Dirigides			
Classes de problemes	14	0,56	1, 2, 3, 4
Classes de teoria	30	1,2	1, 2, 4
Tipus: Supervisades			
Seminaris	6	0,24	1, 2, 3, 4, 5
Tipus: Autònomes			
Estudi personal	45	1,8	1, 2, 4, 7
Preparació i exposició de treballs	16	0,64	1, 2, 4, 5, 7
Resolució de problemes	30	1,2	1, 3, 4, 5, 7

Avaluació

L'avaluació d'aquesta assignatura tindrà en compte l'assimilació dels continguts, així com el treball realitzat durant el curs, i es realitzarà en forma d'avaluació continuada. La nota final s'obtéindrà per mitja ponderada entre la puntuació obtinguda al mòdul d'exàmen parcial (30%), el mòdul d'exàmen final (30 %), el mòdul de lliurament de problemes (20%) i el mòdul de presentació de treballs (20%). Les eventuais matrícules d'honor s'atorgaran en funció de la nota d'avaluació continuada. Els alumnes que no haguessin aprovat l'avaluació continuada, és a dir que no haguessin obtingut una nota final igual o superior a cinc, o bé que vulguin millorar la seva nota, disposaran d'una prova final de recuperació dels mòduls d'exàmens i de lliurament de problemes.

Un alumne serà qualificat com a "No presentat" si el pes de les activitats d'avaluació en les quals ha participat no supera el 50% del pes de l'avaluació continuada de l'assignatura.

Activitats d'avaluació

Títol	Pes	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Examen de recuperació	0,80	4	0,16	1, 2, 3, 4, 5, 7
Examen final	0,30	1,5	0,06	1, 2, 3, 4, 5, 7
Examen parcial	0,30	1,5	0,06	1, 2, 3, 4, 5, 7
Lliurament de problemes	0,20	1	0,04	1, 2, 3, 4, 5
Presentació de treballs	0,20	1	0,04	1, 2, 4, 5, 6, 7

Bibliografia

- 1- Manfredo P. do Carmo, Riemannian Geometry. Birkhauser, 1992.
- 2- Manfredo P. do Carmo, Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza Universidad, 1990.
- 3- S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1990.
- 4- Joan Girbau, Geometria diferencial i relativitat. Manuals de la UAB, Servei de Publicacions de la U.A.B.,1993.
- 5- John M. Lee, Riemannian Manifolds: An introduction to curvature. Springer-Verlag, 1997.
- 6- M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish Inc, 1979.