Universitat Autònoma de Barcelona

**2019/2020**

## Geometría diferencial

Código: 100107
Créditos ECTS: 12

| Titulación | Tipo | Curso | Semestre |
|---|---|---|---|
| 2500149 Matemáticas | OB | 3 | 2 |

## Contacto

Nombre: Marcel Nicolau Reig

Correo electrónico: Marcel.Nicolau@uab.cat

## Uso de idiomas

Lengua vehicular mayoritaria: catalán (cat)

Algún grupo íntegramente en inglés: No

Algún grupo íntegramente en catalán: Sí

Algún grupo íntegramente en español: No

## Equipo docente

Eduardo Gallego Gómez

Agustí Reventós Tarrida

Gil Solanes Farrés

## Prerequisitos

Para asimilar los contenidos de la asignatura es conveniente tener un conocimiento previo de cálculo en varias variables (derivación, integración, teorema de la función implícita), de ecuaciones diferenciales (teorema de existencia y unicidad de soluciones), de álgebra y geometría lineales (diagonalización de endomorfismos autoadjuntos, formas cuadráticas) y de topología (homeomorfismo, índice de una curva plana, característica de Euler).

## Objetivos y contextualización

Los conceptos y nociones de la geometría diferencial y del cálculo vectorial son básicos para la comprensión de la realidad física que nos rodea. También son importantes sus aplicaciones técnicas en el campo de la ingeniería, donde los objetos de estudio se pueden representar geométricamente por elementos no lineales del espacio tridimensional R3, es decir, básicamente por curvas y superficies.

El objetivo principal es conocer cuáles son las nociones geométricas que permiten caracterizar de manera teórica la forma de estos elementos (curvatura y torsión en el caso de una curva, primera y segunda forma fundamental en el caso de una superficie), así como desarrollar métodos de cálculo de sus características métricas (longitud, área, etc.). También es importante relacionar los invariantes asociados a una curva contenida en una superficie con las nociones y magnitudes propias de esta última. Estas propiedades serán tratadas en los dos primeros bloques de la asignatura.

En el tercer bloque del curso se introducirán las nociones clásicas del cálculo vectorial: campos vectoriales y sus integrales de línea y de superficie, así como los teoremas integrales de Green, Gauss y Stokes que las relacionan. Estos resultados se obtendrán como consecuencia del teorema de Stokes para formas diferenciales. Se presentarán numerosas aplicaciones de estos teoremas, tanto en la física como la geometría.

## Competencias

- Asimilar la definición de objetos matemáticos nuevos, de relacionarlos con otros conocidos y de deducir sus propiedades.
- Demostrar una elevada capacidad de abstracción.
- Identificar las ideas esenciales de las demostraciones de algunos teoremas básicos y saberlas adaptar para obtener otros resultados.
- Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía.
- Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio.
- Reconocer la presencia de las Matemáticas en otras disciplinas.
- Utilizar aplicaciones informáticas de análisis estadístico, cálculo numérico y simbólico, visualización gráfica, optimización u otras para experimentar en Matemáticas y resolver problemas.

## Resultados de aprendizaje

1. Aplicar las integrales de línea y superficie para reconocer algunas propiedades globales de curvas y superficies.
2. Entender las aplicaciones del cálculo vectorial y de la geometría diferencial a problemas de la física.
3. Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía.
4. Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio.
5. Reconocer la naturaleza de los puntos de una curva en R3. Cálculo de curvatura y torsión.
6. Reconocer la naturaleza de los puntos de una superficie en R3. Cálculo de la curvatura de Gauss, curvatura media y curvaturas principales.
7. Reconocer topológicamente las superficies compactas y su clasificación.
8. Saber plantear y resolver integrales curvilíneas e integrales de superficie.
9. Usar algún tipo de software científico para realizar cálculos y visualizar superficies.

## Contenido

1. Curvas
Parametrizaciones y longitud.
Curvatura y torsión. Fórmulas de Frenet.
Esfera osculatriz.

2. Superficies.
Superficies regulares.
Primera forma fundamental.
Aplicación de Gauss y segunda forma fundamental.
Curvatura normal y curvatura geodésica.
Geometría intrínseca de superficies . Teorema egregio.
Geodésicas.
Teorema del defecto.

3. Cálculo vectorial.
Formas diferenciales.
Variedades y variedades con borde.
Integración.

Teorema de Stokes y aplicaciones.
Teorema de Gauss-Bonnet.

## Metodología

Cada semana lectiva del curso se harán 3 sesiones de 1 hora de teoría, 2 sesiones de 1 hora de problemas y 1 sesión de 2 horas de seminario.

En las clases de teoría se introducirán los conceptos fundamentales, ilustrados con ejemplos abundantes, y se explicarán los temas del programa alentando a los estudiantes a preguntar y participar activamente en clase.

En las clases de problemas se resolverán ejercicios y se analizarán cuestiones que aclaren y desarrollen las nociones introducidas en las clases de teoría y que el alumno deberá haber pensado previamente en horas de estudio, individualmente o en grupo. Se hará especial hincapié en los métodos heurísticos de resolución de los problemas matemáticos propios de la materia, insistiendo en la necesidad del trabajo autónomo por parte de los alumnos.

Las sesiones de seminario están principalmente dedicadas a desarrollar algunos temas por parte del alumno, pero también a profundizar de forma autónoma en las cuestiones tratadas en clase de teoría. Previamente a la realización de cada sesión, los profesores harán público un guión detallando los objetivos de la sesión y una lista de ejercicios y observaciones pautadas a fin de alcanzar estos objetivos. Los alumnos tendrán que leerlo con atención y podrán hacer las búsquedas bibliográficas que consideren oportunas para resolver los ejercicios propuestos. Durante la sesión, los alumnos darán respuesta a las cuestiones planteadas guiados por los profesores que resolverán dudas puntuales y comentarán los aspectos más importantes del tema a desarrollar. Al finalizar cada sesión los profesores informarán a los alumnos si han de entregar un informe por escrito con la resolución de algunas de las cuestiones formuladas.Se pedirá un máximo de 4 informes o entregas de las 14 sesiones de seminarios.

Es importante que el alumno se habitúe al uso de la biblioteca, consultando en particular la bibliografía propuesta. Aconsejamos también el uso de algún manipulador algebraico, como por ejemplo SAGE, para facilitar cálculos rutinarios y para obtener representaciones gráficas que ayuden a visualizar diferentes objetos geométricos.

## Actividades

| Título | Horas | ECTS | Resultados de aprendizaje |
|---|---|---|---|
| Tipo: Dirigidas | | | |
| Clases de problemas | 30 | 1,2 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| Clases de teoría | 45 | 1,8 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| Tutorías | 15 | 0,6 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| Tipo: Supervisadas | | | |
| Clases de seminario | 28 | 1,12 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| Tipo: Autónomas | | | |
| Estudio personal | 160 | 6,4 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |

## Evaluación

La nota de la evaluación continua de la asignatura, AC, se obtendrá a partir de:

1. las notas de dos exámenes parciales, E1 y E2,

2. la nota de la entrega de ejercicios (provenientes de las clases de problemas o de los seminarios), P,

de acuerdo con la fórmula: AC = 0,35 E1 + 0,45 E2 + 0,20 P.

El alumno supera la asignatura si AC es superior o igual a 5. En caso contrario, el alumno dispone de un examen de recuperación que dará lugar a una nota ER. El examen de recuperación puede utilizarse para mejorar la nota pero, en todos los casos, la nota ER sustituirá la suma de las notas de los dos exámenes parciales, E1 + E2. La nota P de entrega de ejercicios NO es recuperable y por lo tanto la nota ER del examen de recuperación tendrá un peso del 80% en la nota final. Para poder asistir a la recuperación, el alumno ha tenido que haber sido evaluado previamente de actividades de evaluación continua que equivalgan a 2/3 de la nota final.

Las Matrículas de Honor se asignarán en función de la nota de evaluación continua AC, en los casos que se considere oportuno.

Se considera que el alumno se presenta la evaluación del curso si ha participado en actividades de evaluación que superen el 50% del total. En caso contrario su calificación será de No Evaluable.

## Actividades de evaluación

| Título | Peso | Horas | ECTS | Resultados de aprendizaje |
|---|---|---|---|---|
| Entrega de informes y problemas P | 20% | 10 | 0,4 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| Examen E1 | 35% | 4 | 0,16 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| Examen E2 | 45% | 4 | 0,16 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| Examen de recuperación ER | 80% | 4 | 0,16 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |

## Bibliografía

1. Manfredo P. do Carmo. Geometría diferencial de curvas y superfícies. Alianza Editorial. 1990
2. Joan Girbau. Geometria diferencial i relativitat. Manuals de la UAB. 1993
3. Michael Spivak. Cálculo en Variedades. Ed. Reverté. 1970
4. Sebastián Montiel y Antonio Ros. Curvas y superfícies. Proyecto Sur. 1998