

**Sistemes dinàmics**

Codi: 100118  
Crèdits: 6

| Titulació            | Tipus | Curs | Semestre |
|----------------------|-------|------|----------|
| 2500149 Matemàtiques | OT    | 4    | 0        |

**Professor/a de contacte**

Nom: Joan Torregrosa Arús

Correu electrònic: Joan.Torregrosa@uab.cat

**Utilització d'idiomes a l'assignatura**

Llengua vehicular majoritària: català (cat)

Grup íntegre en anglès: No

Grup íntegre en català: Sí

Grup íntegre en espanyol: No

**Prerequisits**

Equacions diferencials ordinàries: existència i unicitat de les solucions del problema de Cauchy.

Resolució de sistemes diferencials lineals amb coeficients constants.

Àlgebra lineal: espais i subespais vectorials, diagonalització de matrius.

**Objectius**

Aquest curs és una iniciació a la teoria moderna de sistemes dinàmics. Un primer objectiu és que l'alumne es familiaritzi amb la noció abstracte de sistema dinàmic i els conceptes bàsics d'aquesta teoria: estabilitat, atractor, conjunts invariants, omega límits, etc. El segon objectiu és entendre com és el comportament local, tant dels sistemes dinàmics discrets com els continus, en l'entorn d'un punt d'equilibri o d'una òrbita periòdica.

Aquest comportament local es basa en la classificació topològica dels sistemes lineals a  $\mathbb{R}^n$ , tant els que venen determinats pel flux d'equacions diferencials ordinàries (sistemes dinàmics continus) com els que provenen de la iteració de funcions (sistemes dinàmics discrets). Els sistemes lineals són molt importants. D'una banda perquè apareixen en l'estudi de molts fenòmens físics d'interès i d'altra banda perquè són la primera aproximació de sistemes més complicats.

La Teoria qualitativa de les equacions diferencials es va iniciar amb els treballs de Poincaré cap a l'any 1880 en relació amb els seus treballs de Mecànica Celest i tracta de conèixer propietats de les solucions sense necessitat de resoldre les equacions, entre altres coses perquè la resolució no és factible. Aquest enfoc qualitatiu, quan es combina amb mètodes numèrics adequats, és, en alguns casos, equivalent a tenir les solucions de l'equació. Tractarem doncs de que l'alumne conegui alguns resultats bàsics de la teoria qualitativa (Teoremes de Liapunov, Teorema de Hartman i Teoremes de les varietats estable i central) sobre l'estructura local dels punts crítics i les òrbites periòdiques i en el cas de  $\mathbb{R}^2$  s'iniciï en el problema de detectar l'existència d'òrbites periòdiques via els teoremes de Poincaré-Bendixson i Bendixson-Dulac.

L'últim objectiu és el d'introduir les tècniques per entendre la dinàmica global discreta. L'exemple principal serà el d'una família paramètrica de sistemes dinàmics discrets: les aplicacions unimodals, i que (per alguns valors dels paràmetre) presenten una dinàmica que porta de manera senzilla a la noció de sistema caòtic. Per aquests sistemes l'aproximació numèrica no és factible i per entendre la seva dinàmica calen noves eines. Els sistemes caòtics es presenten sovint a les aplicacions (problemes de predicció meteorològica, circuits elèctrics, etc).

## Competències

- Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
- Comprendre i utilitzar el llenguatge matemàtic
- Identificar les idees essencials de les demostracions d'alguns teoremes bàsics i saber-les adaptar per obtenir altres resultats
- Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
- Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat

## Resultats d'aprenentatge

1. Conèixer la resolució de certs problemes teòrics així com conèixer l'existència de certs problemes oberts en la teoria d'equacions en derivades parcials i de sistemes dinàmics
2. Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
3. Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
4. Saber aplicar les eines dinàmiques descrites en les classes de teoria per descriure processos regits per equacions diferencials.
5. Saber demostrar resultats d'equacions en derivades parcials i sistemes dinàmics.

## Continguts

### 1. Sistemes Dinàmics a espais Euclidians.

- Sistemes dinàmics definits per equacions diferencials i per difeomorfismes.
- Òrbites; punts crítics i òrbites periòdiques.
- Conjunts invariants i conjunts límit.
- Atractors. Estabilitat Liapunov.
- Conjugació de sistemes dinàmics.

### 2. Estudi de la dinàmica local, discreta i continua.

- Retrat de fase a l'entorn d'un punt crític i d'un punt regular (Solucions dels sistemes lineals,...)
- Classificació topològica dels sistemes lineals continus i discrets.
- Estabilitat (Funcions de Liapunov)
- Teoremes de Hartman, de la varietat estable i de la varietat central.
- Òrbites periòdiques: Aplicació de Poincaré i estabilitat.

### 3. Dinàmica global en sistemes continus.

- Equacions diferencials ordinàries a  $\mathbb{R}^2$  (Teorema de Poincaré-Bendixon, Teorema de Bendixon-Dulac, Existència i unicitat de cicles límit,...)
- Equacions diferencials ordinàries en dimensió major que 2.

### 4. Dinàmica global en sistemes discrets.

- Iteració en dimensió 1 i 2.
- Les aplicacions unimodals.
- Caos. El shift de Bernoulli. La ferradura de Smale.

Els continguts poden ser adaptats, si cal, segons els continguts cursats a les assignatures d'equacions diferencials de tercer.

## Metodologia

L'assignatura disposa, al llarg del semestre de dues hores de classe de teoria i una hora de classe de problemes cada setmana.

Els horaris i aules hauran de consultar-se al web de la titulació. Estarà oberta una aplicació d'aquesta assignatura al Campus Virtual (CV) per tal de subministrar part del material i tota la informació relativa a aquesta assignatura.

Classes de teoria. El professor anirà desenvolupant els temes del programa en l'ordre indicat. Al CV hi haurà també a disposició dels alumnes una bibliografia i part del material de suport, si cal, per a la teoria i/o problemes.

Classes de problemes. Les llistes de problemes estaran disponibles al CV. Alguns d'aquests problemes es treballaran a l'aula.

## Activitats formatives

| Títol                             | Hores | ECTS | Resultats d'aprenentatge |
|-----------------------------------|-------|------|--------------------------|
| Tipus: Dirigides                  |       |      |                          |
| Classes de Teoria                 | 29    | 1,16 |                          |
| Classes de resolució de problemes | 14    | 0,56 |                          |
| Seminaris                         | 6     | 0,24 |                          |
| Tipus: Autònomes                  |       |      |                          |
| Estudi de la part teòrica         | 32    | 1,28 |                          |
| Preparació d'examen               | 15    | 0,6  |                          |
| Realització de problemes          | 42    | 1,68 |                          |

## Avaluació

Es considera avaluació continuada l'examen parcial (35% de la nota total) i la feina encarregada als seminaris (20% de la nota total)

L'examen de recuperació només permetrà recuperar la nota de l'examen de final de semestre (45% de la nota total). La resta es considera avaluació continuada, i per tant, no recuperable. Cal haver participat en 2/3 de les activitats avaluades.

IMPORTANT: Es considerarà que un alumne/a s'ha presentat a l'assignatura si fa 1/2 de l'avaluació continuada o l'examen final o el de recuperació.

## Activitats d'avaluació

| Títol | Pes | Hores | ECTS | Resultats d'aprenentatge |
|-------|-----|-------|------|--------------------------|
|-------|-----|-------|------|--------------------------|

|                         |      |   |      |            |
|-------------------------|------|---|------|------------|
| Examen Final            | 45%  | 3 | 0,12 | 1, 2, 4, 5 |
| Examen Parcial          | 35%  | 3 | 0,12 | 1, 2, 4, 5 |
| Prova de recuperació    | 100% | 0 | 0    | 2          |
| Seminaris (3 entregues) | 20%  | 6 | 0,24 | 2, 3, 4    |

## Bibliografia

L.H. ALVES, Sistemas Dinâmicos, Mack Pesquisa, 2006.

D.K. ARROWSMITH, C.M. PLACE, An Introduction to dynamical Systems, Cambridge University Press, 1990.

D.K. ARROWSMITH, C.M. PLACE, Dynamical Systems, differential equations, maps and chaotic behaviour, Chapman & Hall Mathematics, 1992.

R.L. DEVANEY, An introduction to chaotic dynamical systems, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1986.

R.L. DEVANEY, Chaos, fractals and Dynamics, Computer experiments in mathematics, Addison-Wesley, 1990.

R.L. DEVANEY, A first course in chaotic dynamical systems, Theory and Experiment, Studies in Nonlinearity, 1992.

F. DUMORTIER, J.LLIBRE and J.C. ARTES, Qualitative Theory of Planar Differential Systems, Universitext, Springer-Verlag Berlin, 2006.

C. FERNANDEZ, F. j. VAZQUEZ, J. M. VEGAS, Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas Dinámico, Thomson 2003.

J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES, Nonlinear oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1993.

M. HIRSCH, S. SMALE and R. DEVANEY, Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos, Elsevier Academic Press, 2004.

M.C. IRWIN, Smooth Dynamical Systems, Advanced series in Nonlinear Dynamics, vol.17, World Scientific, 2001.

S. LYNCH, Dynamical Systems with Applications using MAPLE, Birkhäuser, 2000.

L. PERKO, Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1996.

C. ROBINSON, Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos CRC Press, 1999.

J. L. ROMERO, C. GARCIA, Modelos y Sistemas Dinámicos, Univesidad de Cádiz, 1998.

J. SOTOMAYOR, Lições de equacoes diferenciais ordinárias, Projecto Euclides, Gráfica Editora Hamburg Ltda., 1979.