

**Topologia**

Codi: 100106  
Crèdits: 6

| Titulació            | Tipus | Curs | Semestre |
|----------------------|-------|------|----------|
| 2500149 Matemàtiques | OB    | 3    | 1        |

La metodologia docent i l'avaluació proposades a la guia poden experimentar alguna modificació en funció de les restriccions a la presencialitat que imposin les autoritats sanitàries.

**Professor/a de contacte**

Nom: Natalia Castellana Vila  
Correu electrònic: Natalia.Castellana@uab.cat

**Utilització d'idiomes a l'assignatura**

Llengua vehicular majoritària: català (cat)  
Grup íntegre en anglès: No  
Grup íntegre en català: Sí  
Grup íntegre en espanyol: No

**Equip docent**

Guillermo Carrión Santiago

**Prerequisits**

L'experiència en la docència d'aquesta assignatura demostra que és extraordinàriament important que l'alumne hagi assimilat, abans d'iniciar el curs, els fonaments bàsics del que és el raonament matemàtic deductiu. Cal tenir experiència en el mètode axiomàtic, cal conèixer els principis més bàsics de la lògica matemàtica, convé estar familiaritzat amb el que és un raonament matemàtic correcte i el que no ho és, amb els diversos paradigmes de la demostració matemàtica (reducció a l'absurd, aportació d'un contraexemple, pas al contrarecíproc, etc.). Cal estar habilitat en la negació d'una proposició, en l'ús dels quantificadors ("existeix un  $x$  tal que", "per a tot  $x$  es compleix tal cosa") i en la idea d'implicació ( $a$  implica  $b$ ,  $a$  no implica  $b$ , a si i només si  $b$ ).

Com que una bona part de l'assignatura es basa en reformular des d'un punt de vista més general una sèrie de conceptes que es coneixen en el context dels espais mètrics, és important que l'alumne tingui un bon domini de la topologia dels espais mètrics i, en particular, la topologia de l'espai euclidià.

**Objectius**

L'objectiu principal del curs és que l'alumne compregui que una topologia en un conjunt és l'estructura natural per a tractar la idea bàsica de la continuïtat.

Hi ha problemes, formulats inicialment sobre objectes geomètrics, que no depenen de distàncies, d'angles o d'alineacions, sinó d'una mena de connexió contínua entre els punts que componen l'objecte. Són els problemes topològics. El concepte d'espai topològic, de manera anàloga a com el concepte d'espai vectorial va sorgir per modelar els espais euclidians, en un principi volia modelar els objectes geomètrics com, per exemple, les superfícies de l'espai, però ben aviat va transcendir aquest marc i ràpidament la topologia va fer-se present (i indispensable) en totes les branques de les Matemàtiques.

Estudiarem conceptes que l'alumne ja coneix en el cas dels espais mètrics en un context més general. Parlarem d'oberts i tancats, de continuïtat i espais compactes. Pot semblar, doncs, que aquest curs és una

repetició gratuïta de coses conegudes però va més enllà. És d'esperar, però, que l'alumne se n'adoni que aquest nou punt de vista és molt més general i, principalment, molt més flexible, que el punt de vista mètric.

## Competències

- Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
- Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
- Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
- Demostrar una elevada capacitat d'abstracció.
- Identificar les idees essencials de les demostracions d'alguns teoremes bàsics i saber-les adaptar per obtenir altres resultats
- Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
- Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
- Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
- Que els estudiants sàpiguin aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseeixin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.

## Resultats d'aprenentatge

1. Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
2. Construir exemples d'espais topològics utilitzant les nocions de subespai topològic, espai producte i espai quocient.
3. Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
4. Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
5. Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
6. Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
7. Que els estudiants sàpiguin aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseeixin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.
8. Reconèixer topològicament les superfícies compactes i la seva classificació.
9. Utilitzar els conceptes bàsics associats a les nocions d'espai mètric i espai topològic: compacitat i connexió.

## Continguts

1. Aplicacions contínues entre espais mètrics.
2. L'axiomàtica d'espai topològic.
3. Entorns, interior, adherència.
4. Aplicacions contínues.
5. Subespais topològics.
6. La topologia producte.

7. La topologia quocient.
8. Espais compactes.
9. Espais de Hausdorff: axiomes de separació.
10. Connexió.
11. El concepte de varietat.
12. El teorema de classificació de les superfícies compactes.

## Metodologia

El número d'hores dirigides descrites a continuació es poden veure afectades i modificades per les mesures que les autoritats decretin per afrontar la situació de pandèmia amb la qual s'inicia el curs.

Hi ha 30 hores destinades al desenvolupament de conceptes, exemples i resultats, 15 hores de treball de resolució i discussió de problemes i reptes i 6 hores de seminaris per aprofundir en qüestions paral·leles/complementàries. Això representa 51 hores (a l'aula, en format virtual o en forma de material disponible al CV). Se suposa que l'assignatura requereix 150 hores de dedicació de l'estudiant (25 h/crèdit x 6 crèdits = 150 h). Cal ser conscients que això significa que l'aprenentatge es basa essencialment en el treball personal de l'alumne. Tanmateix, en Matemàtiques (com passa en moltes altres àrees de l'activitat humana: la música, l'esport...), la mera observació de com el professor resol determinats problemes té un valor molt limitat. El coneixement només s'assoleix quan l'alumne intenta atacar aquests mateixos problemes de manera autònoma i crítica.

En aquesta assignatura, la importància de la capacitat d'utilitzar correctament el raonament lògic-deductiu és cabdal, per damunt de l'adquisició de coneixements concrets de topologia. Es donarà molta importància, doncs, a l'entrenament en

- La generació de raonaments correctes.
- La detecció dels raonaments incorrectes.
- La capacitat de comunicar els raonaments correctes utilitzant amb rigor el llenguatge matemàtic.

El paper dels seminaris serà treballar per aconseguir aquests tres objectius.

Convé insistir en que la millor metodologia de treball és la que es basa en estudiar cada dia. Si això no es fa, les classes esdevenen avorrides i incomprensibles, perquè ja sabem que en Matemàtiques els coneixements es disposen sempre els uns sobre els altres, de manera piramidal. Aquest estudi individual i autònom ha d'anar sempre lligat a l'exercici de la comunicació matemàtica escrita. Cal saber escriure sobre un paper, de manera lineal i semànticament correcta (en el paradigma de la semàntica matemàtica), les idees que puguem tenir al cap sobre la resolució d'un determinat problema.

S'usarà el Campus Virtual com a mitjà de comunicació. Al CV s'hi publicaran els apunts del curs, les llistes d'exercicis i tots els materials docents que s'utilitzin.

## Activitats formatives

| Títol                   | Hores | ECTS | Resultats d'aprenentatge |
|-------------------------|-------|------|--------------------------|
| Tipus: Dirigides        |       |      |                          |
| Classes de problemes    | 15    | 0,6  |                          |
| Classes de teoria       | 30    | 1,2  |                          |
| Seminaris               | 6     | 0,24 |                          |
| Tipus: Autònomes        |       |      |                          |
| Temps d'estudi personal | 88    | 3,52 |                          |

## Avaluació

Hi haurà una avaluació específica de l'activitat desenvolupada en els seminaris, que comptarà un 20% de la nota final.

Hi haurà dues proves escrites: un examen parcial a meitat del semestre (25% de la nota final) i un examen final (55% de la nota final). Si la nota del final és millor, aquesta comptarà el 80 % i no comptarà la del parcial (aquesta darrera norma no s'aplica per assignar les matrícules d'honor).

Cal treure un mínim de 4 a l'examen final (o a la prova complementària) per aprovar l'assignatura.

Els estudiants que vulguin millorar la nota que han obtingut amb aquesta avaluació continuada, podran presentar-se a una prova escrita complementària. En aquest cas, la nota final definitiva s'obtindrà a partir de la nota de seminaris (20%), i la nota d'aquesta prova complementària (80%). (Observeu que la prova complementària pot fer que la nota final pugi o baixi respecte de la nota d'avaluació continuada.)

Es considerarà que un alumne s'ha presentat a l'assignatura si ha realitzat activitats d'avaluació que representin un pes igual o superior al 50% de la nota final del curs.

La concessió de la qualificació de "matrícula d'honor" es farà amb posterioritat a totes les activitats d'avaluació, incloent la "prova complementària" i tenint en compte totes les avaluacions.

## Activitats d'avaluació

| Títol                  | Pes | Hores | ECTS | Resultats d'aprenentatge  |
|------------------------|-----|-------|------|---------------------------|
| Avaluació de seminaris | 20% | 3     | 0,12 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| Examen Final           | 55% | 4     | 0,16 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9    |
| Examen Parcial         | 25% | 4     | 0,16 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9       |

## Bibliografia

- Jaume Aguadé, *Apunts d'un curs de topologia elemental*. <http://mat.uab.es/~aguade/teaching.html>
- Czes Kosniowski, *A first course in algebraic topology*. Cambridge University Press 1980.
- William S. Massey, *A basic course in algebraic topology*. Springer-Verlag 1991.
- Klaus Jänich, *Topology*. Springer-Verlag 1984.
- Colin Adams, Robert Franzosa, *Introduction to Topology: Pure and Applied*, Prentice-Hall, 2008
- James Munkres, *General Topology*, Prentice-Hall, 2000.