

**Topologia de varietats**

Codi: 100114  
Crèdits: 6

Titulació	Tipus	Curs	Semestre
2500149 Matemàtiques	OT	4	0

La metodologia docent i l'avaluació proposades a la guia poden experimentar alguna modificació en funció de les restriccions a la presencialitat que imposin les autoritats sanitàries.

**Professor/a de contacte**

Nom: Wolfgang Pitsch  
Correu electrònic: Wolfgang.Pitsch@uab.cat

**Utilització d'idiomes a l'assignatura**

Llengua vehicular majoritària: espanyol (spa)  
Grup íntegre en anglès: No  
Grup íntegre en català: No  
Grup íntegre en espanyol: Sí

**Equip docent**

Roberto Rubio Nuñez

**Prerequisits**

És recomanable haver cursat reeixidament l'assignatura de Geometria Diferencial.

**Objectius**

Ever since the concept of homeomorphism was clearly defined, the "ultimate" problem in topology has been to classify topological spaces "up to homeomorphism". That this was a hopeless undertaking was very soon apparent, the subspaces of the plane  $\mathbb{R}^2$  being an obvious example. From this impossibility were born algebraic and differential topology, by a shift of emphasis which consisted in associating "invariant" objects to some types of spaces (objects are the same for two homeomorphic spaces). At first these objects were integers, but it was soon realized that much more information could be extracted from invariant algebraic structures such as groups and rings.

(Jean Dieudonné, A history of algebraic and differential topology 1900--1960)

L'objectiu d'aquest curs és doble. D'una banda, introduïrem una de les classes d'espais topològics més importants, i més estudiades: les varietats diferenciables. Aquests espais, molt comuns tant en matemàtiques com en física, per exemple, tenen l'agradable característica de ser els espais en els quals es poden estendre sense massa dificultats els conceptes prèviament vistos a les assignatures de Càlcul en Diverses Variables i de Geometria Diferencial.

Per altra banda, farem una introducció als mètodes cohomològics en topologia. La cohomologia de de Rahm és un exemple d'un procés summament útil per entendre la "forma" de les varietats: consisteix a transformar (part de) la informació geomètrica que suporta una varietat en objectes algebraics, en aquest cas una successió d'espais vectorials. Això permet a priori la següent estratègia per resoldre un problema sobre una varietat: traduir-lo en un problema algebraic, calcular la solució en àlgebra i reinterpretar de manera geomètrica el resultat. En particular aquests espais vectorials codifiquen de manera molt assequible diverses

propietats de la varietat: la dimensió, l'orientabilitat, propietats d'orientabilitat superiors (estructures spin, etc.). A més d'introduir aquests grups de cohomologia presentarem algunes de les eines utilitzades per extreure la informació rellevant d'aquests espais.

Això serà doncs un primer cop d'ull a una teoria que ve desenvolupant-se des de finals de segle XIX i que continua activa. Entre els seus grans èxits es troben: la classificació de les superfícies, la demostració de la conjectura de Poincaré en dimensions més grans que 5, el problema del "invariant de Kervaire 1" i més recentment el desenvolupament de tècniques topològiques per a l'anàlisi de dades.

## Competències

- Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
- Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
- Demostrar una elevada capacitat d'abstracció.
- Desenvolupar un pensament i un raonament crític i saber comunicar-ho de manera efectiva, tant en les llengües pròpies com en una tercera llengua
- Formular hipòtesis i imaginar estratègies per confirmar-les o refutar-les.
- Generar propostes innovadores i competitives en la recerca i en l'activitat professional.
- Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
- Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
- Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
- Que els estudiants tinguin la capacitat de reunir i interpretar dades rellevants (normalment dins de la seva àrea d'estudi) per emetre judicis que incloguin una reflexió sobre temes rellevants d'índole social, científica o ètica.
- Utilitzar eficaçment bibliografia i recursos electrònics per obtenir informació

## Resultats d'aprenentatge

1. Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
2. Comprendre el llenguatge abstracte i conèixer demostracions rigoroses d'alguns teoremes de geometria i topologia avançades.
3. Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
4. Desenvolupar un pensament i un raonament crític i saber comunicar-ho de manera efectiva, tant en les llengües pròpies com en una tercera llengua
5. Generar propostes innovadores i competitives en la recerca i en l'activitat professional.
6. Idear demostracions de resultats matemàtics de l'àrea de geometria i topologia.
7. Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
8. Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
9. Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
10. Que els estudiants tinguin la capacitat de reunir i interpretar dades rellevants (normalment dins de la seva àrea d'estudi) per emetre judicis que incloguin una reflexió sobre temes rellevants d'índole social, científica o ètica.
11. Utilitzar eficaçment bibliografia i recursos electrònics per obtenir informació.

## Continguts

El curs tractarà els següents temes:

### 1) Definició de varietat llisa:

- Noció d'atles.
- Funcions llises.
- Subvarietats.

### 2) Espai tangent:

- Vector tangent.
- Aplicació tangent.
- Immersions, submersions.
- Transversalitat

### 3) Camps vectorials:

- Definicions.
- Flux d'un camp de vectors.
- Càlcul de Lie.
- Fibrats vectorials generals.

### 4) Formes diferencials:

- Definició.
- Producte exterior i diferencial.
- Complex de de Rahm.
- Noció d'homologia.

### 5) Cohomologia de de Rahm:

- Propietats formals.
- Invariància homotòpica.
- Successions de Mayer-Vietoris.
- Teorema de Künneth.

### 6) Orientabilidad:

- Producte cup.
- Integració de formes diferencials.
- Fórmula de Stokes.
- Dualitat de Poincaré.

## Metodologia

En aquest curs es seguirà una metodologia de "classe inversa". Als alumnes se'ls proporcionaran cada setmana unes quantes pàgines de lectura i de problemes que s'hauran d'estudiar a consciència abans d'arribar a classe. Aquestes pàgines vindran acompanyades d'una guia de lectura i de preguntes destinades a estimular la reflexió personal dels alumnes. La classe es destinarà a acabar de comprendre els conceptes clau (resolent els dubtes que hi pugui haver), posar-los en pràctica a través de la resolució de problemes i analitzar la seva importància o contextualitzar-los. S'espera que els alumnes siguin els principals participants de la discussió, mentre que el paper dels professors és dinamitzar aquesta discussió, aportar la seva experiència i coneixement, i suggerir possibles temes. S'espera que aquestes discussions es duguin a terme en petits grups a l'aula (seguint les mesures de distanciament recomanades en cada moment) per després compartir els avenços aconseguits amb tota la classe. Aquesta dinàmica de grups serà també la que se seguirà en les classes virtuals.

Les hores de seminari s'utilitzaran per fer presentacions per part dels alumnes sobre temes que hauran prèviament discutit i treballat en grups.

Al campus virtual de l'assignatura es proporcionarà una guia més detallada sobre la metodologia utilitzada en aquest curs.

## Activitats formatives

Títol	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Tipus: Dirigides			
Classes de problemes	14	0,56	1, 3, 4, 5, 7, 9, 10
Classes de teoria	30	1,2	1, 3, 4, 5, 7, 9, 10
Tipus: Supervisades			
Seminaris	6	0,24	1, 3, 4, 5, 7, 9, 10
Tipus: Autònomes			
Asimilació dels conceptes, arguments i resultats teòrics	45	1,8	5, 7, 9, 11
Preparació i exposició de treballs	15	0,6	1, 2, 4, 7, 9, 11
Resolució de problemes	30	1,2	2, 6, 7, 9

## Avaluació

L'avaluació es farà en dues modalitats: una part important d'avaluació continuada i una part d'avaluació presencial en forma d'examen final. No es farà cap parcial intersemestral.

Cada setmana en el full amb els continguts teòrics que hauran d'estudiar abans de classe trobaran tres tipus d'exercicis:

Exercicis tipus A): Preguntes sobre els conceptes i algun exercici molt bàsic.

Exercicis tipus B): Exercicis d'escalfament per tal d'entendre els conceptes.

Exercicis tipus C): Problemes avançats (no necessàriament totes les setmanes).

S'espera que cada alumne lliuri el diumenge les seves respostes als exercicis A). Aquestes són avaluades sobre 15, i només són possibles quatre notes: 0, 5, 10 i 15. Només s'avalua l'esforç d'haver intentat contestar i no la correcció de la resposta. Es farà la mitjana de les notes obtingudes i es dividirà entre 10, obtenint una nota A que anirà de 0 a 1.5.

Els exercicis B) s'han de lliurar a l'inici de la sessió de dimarts. S'avaluen igualment sobre 15, amb quatre notes possibles: 0, 5, 10 i 15. Igualment no es puntua tant si les respostes són correctes o no, sinó l'esforç que s'ha posat a contestar i la qualitat de la redacció. La nota de 15 suposa haver proposat, en gran part, solucions majoritàriament correctes. . Es farà la mitjana de les notes obtingudes i es dividirà entre 10, obtenint una nota B que anirà de 0 a 1.5.

Els exercicis C) en general no es resoldran a classe. Un cert nombre de vegades es demanarà que es preparin alguns. L'objectiu per a aquests problemes és fer-los perfectament, pel que és possible que els professors demanin refer alguns d'ells si cal. Les notes obtingudes fan mitjana i permeten obtenir una nota C, entre 0 i 10.

Per petits grups se'ls demanarà estudiar alguns temes fora del temari del curs, però dins dels límits d'aquest. Cada grup haurà de lliurar una sinopsi del tema tractat, així com un pla per a la seva presentació oral. Cada grup presentarà de manera oral el seu tema als professors i als seus companys. Tots els integrants del grup hauran de presentar oralment una part del treball. El resultat final dona lloc a una nota P, en què s'avalua tant la petita contribució escrita com la qualitat de la presentació oral. Això dona lloc a una nota P, entre 0 i 10.

L'examen final permetrà obtenir una nota F entre 0 i 10.

NO HI HA PARCIAL.

La nota final serà doncs:  $A + B + 0.2C + 0.2P + 0.3F$

Un document al campus virtual de l'assignatura recordarà la manera de dur a terme l'avaluació amb més detalls.

L'examen de recuperació permetrà recuperar les parts C i F. Aquest examen no servirà per a "pujar nota".

Un alumne que no es presenta a l'examen final és considerat com "No Avaluable".

## Activitats d'avaluació

Títol	Pes	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Entrega de problemes tipus C	20%	0	0	2, 4, 6, 7, 8, 11
Evaluació continuada tipus A	20%	3	0,12	2, 3, 4, 7, 11
Evaluació continuada tipus B.	15%	0	0	1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11
Exàmen de recuperació	50%	3	0,12	2, 3, 4, 6, 8, 10, 11
Exàmen final	30%	3	0,12	2, 3, 6, 8
Presentació oral, tipus P.	20%	1	0,04	2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11

## Bibliografia

Bàsica:

J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Graduate Texts in Mathematics 218, Springer-Verlag, New York. xvii+ 631 pp. (<https://link-springer-com.are.uab.cat/book/10.1007%2F978-1-4419-9982-5>)

L. W. Tu, An introduction to manifolds. Universitext. Springer, New York, second edition, 2011. 384 pp. (<https://link-springer-com.are.uab.cat/book/10.1007%2F978-1-4419-7400-6>)

Avançada:

A. Hatcher, Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+544 pp. (<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>)

R. Bott and L.W. Tu, Differential forms in algebraic topology. Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. xiv+331 pp.

M. W. Hirsch, Differential Topology. Graduate Texts in Mathematics 33, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin 1976. x + 222pp.

P. Michor, Topics in Differential Geometry, Graduate Studies in Mathematics 93. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. xii+494 pp. (<https://www.mat.univie.ac.at/~michor/dgbook.pdf>)