Universitat Autònoma de Barcelona

2021/2022

Estructures algebràiques

Codi: 100096
Crèdits: 9

Titulació	Tipus	Curs	Semestre
2500149 Matemàtiques	OB	2	2

La metodologia docent i l'avaluació proposades a la guia poden experimentar alguna modificació en funció de les restriccions a la presencialitat que imposin les autoritats sanitàries.

Professor/a de contacte

Nom: Dolors Herbera Espinal

Correu electrònic: Dolors.Herbera@uab.cat

Utilització d'idiomes a l'assignatura

Llengua vehicular majoritària: català (cat)

Grup íntegre en anglès: No

Grup íntegre en català: Sí

Grup íntegre en espanyol: No

Equip docent

Francesc Xavier Xarles Ribas

Prerequisits

Els requisits acadèmics previs els trobarem en les assignatures Fonaments de les Matemàtiques i Àlgebra Lineal, de primer curs.

L'habilitat adquirida en les manipulacions algebraiques, i la familiaritat amb les operacions en contextos aritmètics o de grups de permutacions, es continuaran desenvolupant, tot passant a un nivell d'abstracció més elevat, d'altra banda molt comú en Matemàtiques. També seran importants les referències als espais vectorials com a model d'estructura algebraica i als vostres coneixements de manipulació matrius, que seran una font important d'exemples.

Objectius

Els objectius d'aquesta assignatura són de dos tipus: assolir formació en àlgebra bàsica i assolir coneixements i destreses per a manipular objectes abstractes.

El curs presenta tres tipus d'estructures que l'alumne ja ha manipulat, com a mínim, a nivell d'exemples: Grups, Anells i Cossos. Iniciarem l'estudi de cadascuna de les estructures seguirem un esquema similar: definir l'estructura, la subestructura, els morfismes o aplicacions que conserven l'estructura, estructura quocient i Teoremes d'isomorfisme. Per cadascuna anirem una mica més enllà mirant de desenvolupar o d'indicar algun resultat interesant i particular de la teoría. En el cas dels grups seria el tema de l'acció d'un grup sobre un conjunt i els Teoremes de Sylow, en el cas dels anells seria la teoria de la divisibilitat, els cossos de fraccions i la caracterització dels dominis de factorització única. En el cas dels cossos finits el resultat principal seria el teorema d'existència i unicitat.

Les estructures algebraiques són interessants perquè permeten abstreure propietats importants i ens ajuden a saber manipular exemples que poden ser de natura molt diferent. Així una part important del curs, i molts dels problemes es dedicaran a l'introducció i manipulació d'exemples.

- En el cas de grups fonts d'exemples importants seran els grups de permutacions, els enters i els seus quocients i les matrius invertibles a coeficients un cos.
- En el cas dels anells, els enters i l'aritmética modular, i els subanells dels racionals són una font important d'exemples. En el curs volem fer molt ènfasi en el cas dels anells de polinomis en varies variables a coeficients un cos o, simplement, a un anell.
- Finalment, el cas dels cossos finits veurem que tots es "poden veure" com un quocient de l'anell de polinomis en una variable a coeficient el cos finit Z/pZ.Ens interessarà particularment saber com manipular aquests quocients.

Entre els objectius de caire formatiu destaquem els següents:
entendre i utilitzar correctament el llenguatge i el raonament matemàtic, en general, i algebraic, en particular. Ser capaç de fer petites demostracions, desenvolupar el sentit
crític davant les afirmacions matemàtiques,
desenvolupar actituds combatives i la creativitat davant els problemes i, finalment, apendre a aplicar els conceptes i resultats abstractes en exemples concrets. Presentar un raonament o un problema en públic i desenvolupar agilitat per respondre qüestions matemàtiques en una conversa.

El desenvolupament sistemàtic del punt de vista abstracte en àlgebra comença a finals del segle XIX, inicis del segle XX i té a Emmy Noether com a precursora molt descada. Els treballs de David Hilbert van portar Emmy Noether del mon dels càlculs inacabables de la teoría d'invariants a les demostracions etèries i plenes d'abstracció. És coneguda l'anècdota (explicada per Max Noether, pare l'Emmy Noether, el 1914) que, en Paul Gordan (en aquest moment un dels algebristes més reputats del mon) quan va llegir les demostracions de David Hilbert (1888), va exclamar: Das ist keine Mathematik, das ist Theologie! (Això no son matemàtiques. Això és teologia!). El que volem amb aquest curs es que realment us sembli matemàtiques i no teologia, i que us engresqueu amb aquesta manera particular de pensar les coses.

Competències

- Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
- Comprendre i utilitzar el llenguatge matemàtic
- Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
- Identificar les idees essencials de les demostracions d'alguns teoremes bàsics i saber-les adaptar per obtenir altres resultats
- Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
- Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
- Que els estudiants puguin transmetre información idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
- Que els estudiants sàpiguen aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseeixin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.

Resultats d'aprenentatge

1. Calcular el màxim comú divisor i la factorització de nombres enters i polinomis.
2. Construir grups i anells quocient i cossos finits i operar en ells.
3. Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
4. Operar en alguns grups senzills (com a cíclics, dièdrics, simètrics i abelians).
5. Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de

text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
6. Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
7. Que els estudiants puguin transmetre información idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
8. Que els estudiants sàpiguen aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseeixin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.

Continguts

L'assignatura està organitzada en quatre grans blocs, essencialment corresponents als diferents tipus d'estructura que volem estudiar:

I. Teoria de Grups.

- Grups, subgrups i homomorfismes. Exemples bàsics.
- Classes laterals. El Teorema de Lagrange.
- Subgrups normals, grup quocient.
- Teoremes d'isomorfisme.
- Classificació dels grups cíclics. Més coses sobre grups abelians.
- Acció d'un grup sobre un conjunt.
- Teoremes de Sylow.

II. Anells commutatius

- Anells, ideals i morfismes. Exemples bàsics
- Quocients i teoremes d'isomorfia.
- Ideals maximals e ideals primers. El Lema de Zorn.
- Cos de fraccions d'un domini.
- L'anell de polinomis

III. Factorització.

- Dominis d'ideals principals.
- Dominis de factorització única.
- Lemma de Gauss. Factorització en anells de polinomis.

IV. Cossos finits.

- Cossos, subcossos i característica.
- Teorema de l'element primitiu per cossos finits.
- Existència i unicitat de cossos finits.
- El morfisme de Frobenius.

Si la situació amb la pandèmia del Covid-19 no permet desenvolupar les cllasses amb normalitat, i necessitem retallar el temari el primer candidat als retalls seria el tema IV. Tot el que volem fer de cossos finits també es fa a Teoria de Galois, tot i que aquí agafariem un punt de vista més computacional. Evitar fer algunes demostracions del tema III també ens permetria estalviar temps.

Metodologia

Aquesta assignatura té tres hores setmanals de teoria, per a les quals, encara que no disposarem d'un conjunt d'apunts previs, cal destacar que hi ha una varietat interessant de referències bibliogràfiques que es poden tenir en compte per entendre el que s'ha explicat a classe i, si s'escau, ampliar coneixements.

Al llarg del curs es farà una hora setmanal de classe de problemes. Els conceptes introduïts a classe de teoria, els enunciats dels teoremes, les seves demostracions i les aplicacions són imprescindibles quan ens posem a pensar problemes, ja que a vegades les tècniques seran semblants. Els dubtes que sorgeixin es poden preguntar durant la classe o utilitzant els seminaris i les hores de consulta dels professors. Les llistes de problemes seran exhaustives i no s'acabaran a classe, de manera que els estudiants hauran d'acabar-les pel seu compte.

També es faran algunes sessions de seminari, on els alumnes elaboraran i presentaran problemes de l'assignatura, amb la supervisió del professorat. D'algun dells lliuraments de problemes es faran entrevistes personalitzades amb el professor.

A més, l'assignatura disposa d'una pàgina al campus virtual on anirem penjant les llistes de problemes, material addicional i qualsevol informació relacionada amb l'assignatura.

El temps previst a la taula és aproximat i, evidentment, cada estudiant l'haurà d'adaptar a la seva situació. En qualsevol cas, tenint en compte que a més aquesta assignatura compta 9 crèdits, és a dir el 30% dels crèdits d'un semestre estàndard, cal pensar com aconsellable una dedicació aproximada de 12-14 hores setmanals, incloent les classes presencials.

Nota: es reservaran 15 minuts d'una classe, dins del calendari establert pel centre/titulació, per a la complementació per part de l'alumnat de les enquestes d'avaluació de l'actuació del professorat i d'avaluació de l'assignatura/mòdul.

Activitats formatives

Títol	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Tipus: Dirigides			
Classes de problemes	16	0,64	
Classes de teoria	43	1,72	
Tipus: Supervisades			
Seminaris	14	0,56	
Tipus: Autònomes			
Estudi personal i preparació dels seminaris	145	5,8	

Avaluació

Un 20% de la nota correspon a lliurament de problemes als seminaris (S).

Es realitzarà una prova escrita, a mitjans de semestre, per avaluar les capacitats teòriques i pràctiques de l'assignatura. La data de la prova la fixarà la coordinació del grau. La nota sobre 10 d'aquesta prova (P) correspondrà a un 30% de la nota total.

20% de la nota del curs.

Un 50% de la nota correspon a l'obtinguda a l'examen final (F). En aquest examen s'avaluaran els coneixements teòrics i pràctics de l'assignatura.

Si a F s'obté una nota més grann o igual que 3,5, llavors obtenim la nota N=0.20·S + 0.30·P + 0.50·F. L'assignatura quedarà aprovada, doncs, si la nota N és igual o superior a 5 i si s'ha tret un 3,5, com a mínim a l'examen final.

Les matrícules d'honor s'atorgaran en funció del valor de la nota N.

Hi haurà un examen de recuperació corresponent a l'examen final. Només els estudiants que hagin tret una nota infrerior a 3,5 a l'examen final o que la nota N<5 podran presentar-se a aquest examen. En aquest cas, l es calcularà el valor N'=MAX(N;0.20·S + 0.30·P + 0.50·R), on R denota la nota de l'examen de recuperació i la nota final serà N' sempre que aquest valor no superi el 7 i, en cas contrari, la nota de l'assignatura serà 7.

Activitats d'avaluació

Títol	Pes	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Activitats d'avaluació continuada	50%	3	0,12	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Examen	50%	4	0,16	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Bibliografia

Existeixen una colla monografies que cobreixen els continguts de l'assignatura. Recomanem, en aquest sentit, les referències [3],[4] i/o [5]. En el chat seguent podeu veure que hi ha opinions diverses a l'hora de recomanar un text per un primer curs d'àlgebra abstracta:

https://math.stackexchange.com/questions/1017434/how-does-dummit-and-footes-abstract-algebra-text-compare

Pel tractament dels cossos finits seguirem, essencialment, [1]. A més, la referència [1] és un bon pont entre l'assignatura "Fonaments de Matemàtiques" de primer curs i aquesta, amb nombrosos exemples que il·lustren els conceptes abstractes. La referència [2] inclou una col·lecció de problemes resolts.

[1] R. Antoine, R. Camps, J. Moncasi. Introducció a l'àlgebra abstracta. Manuals de la UAB, Servei de Publicacions de la UAB, no. 46, Bellaterra, 2007.

[2] F. Cedó, V. Gisin, Àlgebra bàsica, Manuals de la UAB, Servei de Publicacions de la UAB, no. 21, Bellaterra, 2007.

[3] David S. Dummit and Richard M. Foote, Abstract Algebra, 3rd. Edition, Wiley, 2003.

[4] J.B. Fraleigh. A First course in abstract algebra. Pearson Education, 7th Edition, 2014. Review: https://www.maa.org/press/maa-reviews/abstract-algebra

[5] T. W. Hungerford, Abstract Algebra, Brooks/Cole, 2013. Review:

https://www.maa.org/press/maa-reviews/abstract-algebra-an-introduction

Programari

A l'assignatura no està previst fer servir cap programari específic. Tot i amb això, si que un manipulador algebraic (Maple, Sage,....) pot ser útil a l'hora de fer càlculs.

Hi ha programes específics per maninular grups com GAP - Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra que és útil de conèixer i que pot resoldre la major part dels problemes més calculístics de grups.