

Geometria diferencial

Codi: 100107
Crèdits: 12

Titulació	Tipus	Curs	Semestre
2500149 Matemàtiques	OB	3	2

Professor/a de contacte

Nom: Florent Balacheff

Correu electrònic: florent.balacheff@uab.cat

Utilització d'idiomes a l'assignatura

Llengua vehicular majoritària: català (cat)

Grup íntegre en anglès: No

Grup íntegre en català: Sí

Grup íntegre en espanyol: No

Equip docent

Marcel Nicolau Reig

Gil Solanes Farres

David Marín Pérez

Prerequisits

Per assimilar els continguts de l'assignatura és convenient tenir un coneixement previ de càlcul en diverses variables (derivació, integració, teorema de la funció implícita), d'equacions diferencials (teorema d'existència i unicitat de solucions), d'àlgebra i geometria lineals (diagonalització d'endomorfismes autoadjunts, formes quadràtiques) i de topologia (homeomorfisme, índex d'una corba plana, característica d'Euler).

Objectius

Els conceptes i nocions de la geometria diferencial i del càlcul vectorial són bàsics per a la comprensió de la realitat física que ens envolta. També són importants les seves aplicacions tècniques en el camp de l'enginyeria, on els objectes d'estudi es poden representar geomètricament per elements no lineals de l'espai tridimensional R^3 , és a dir, bàsicament per corbes i superfícies.

L'objectiu principal és conèixer quines són les nocions geomètriques que permeten caracteritzar de manera teòrica la forma d'aquests elements (curvatura i torsió en el cas d'una corba, primera i segona forma fonamental en el cas d'una superfície), així com desenvolupar mètodes de càlcul de les seves característiques mètriques (longitud, àrea, etc.). També és important relacionar els invariants associats a una corba continguda en una superfície amb les nocions i magnituds pròpies d'aquesta última. Aquestes propietats seran tractades en els dos primers blocs de l'assignatura.

En el tercer bloc del curs s'introduiran les nocions clàssiques del càlcul vectorial: camps vectorials i les seves integrals de línia i de superfície, així com els teoremes integrals de Green, Gauss i Stokes que les relacionen. Aquests resultats s'obtidran com a conseqüència del teorema de Stokes per a formes diferencials. Es presentaran nombroses aplicacions d'aquests teoremes, tant a la física com a la geometria.

Competències

- Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
- Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
- Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
- Demostrar una elevada capacitat d'abstracció.
- Identificar les idees essencials de les demostracions d'alguns teoremes bàsics i saber-les adaptar per obtenir altres resultats
- Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
- Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
- Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
- Que els estudiants sàpiguen aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseïxin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.
- Reconèixer la presència de les Matemàtiques en altres disciplines
- Utilitzar aplicacions informàtiques d'anàlisi estadística, càlcul numèric i simbòlic, visualització gràfica, optimització o altres per experimentar en Matemàtiques i resoldre problemes

Resultats d'aprenentatge

1. Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
2. Aplicar les integrals de línia i superfície per reconèixer algunes propietats globals de corbes i superfícies.
3. Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
4. Entendre les aplicacions del càlcul vectorial i de la geometria diferencial a problemes de la física.
5. Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
6. Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
7. Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
8. Que els estudiants sàpiguen aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseïxin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.
9. Reconèixer la naturalesa dels punts d'una corba en R^3 . Càlcul de curvatura i torsió.
10. Reconèixer la naturalesa dels punts d'una superfície en R^3 . Càlcul de la curvatura de Gauss, curvatura mitjana i curvatures principals.
11. Reconèixer topològicament les superfícies compactes i la seva classificació.
12. Saber plantejar i resoldre integrals curvilínies i integrals de superfície.
13. Usar algun tipus de programari científic per realitzar càlculs i visualitzar superfícies

Continguts

1. Corbes
Parametritzacions i longitud.
Curvatura i torsió. Fórmules de Frenet.

Esfera osculatriu.

2. Superfícies.

Superfícies regulars.

Primera forma fonamental.

Aplicació de Gauss i segona forma fonamental.

Curvatura normal i curvatura geodèsica.

Geometria intrínseca de superfícies. Teorema egregi.

Geodèsiques.

Teorema del defecte.

3. Càlcul vectorial.

Formes diferencials.

Varietats i varietats amb vora.

Integració.

Teorema de Stokes i aplicacions.

Teorema de Gauss-Bonnet.

Metodologia

A les classes de teoria s'introduiran els conceptes fonamentals, il·lustrats amb exemples abundants, i s'explicaran els temes del programa tot encoratjant els estudiants a preguntar i participar activament a classe.

A les classes de problemes es resoldran exercicis i s'analitzaran qüestions que aclareixin i desenvolupin les nocions introduïdes a les classes de teoria i que l'alumne haurà d'haver pensat prèviament en hores d'estudi, individualment o en grup. Es farà especial èmfasi en els mètodes heurístics de resolució dels problemes matemàtics propis de la matèria, insistint en la necessitat del treball autònom per part dels alumnes.

Les sessions de seminari estan principalment dedicades a desenvolupar alguns temes per part de l'alumne, però també a aprofundir de forma autònoma en les qüestions tractades a classe de teoria. Prèviament a la realització de cada sessió, els professors faran públic un guió detallant els objectius de la sessió i una llista d'exercicis i observacions pautades a fi d'arribar-hi. Els alumnes l'hauran de llegir amb atenció i podran fer les cerques bibliogràfiques que considerin oportunes per tal de resoldre els exercicis proposats. Durant la sessió, els alumnes donaran resposta a les qüestions plantejades guiats pels professors que resoldran dubtes puntuals i comentaran els aspectes més importants del tema a desenvolupar. En finalitzar cada sessió els professors informaran als alumnes si han d'entregar un informe per escrit amb la resolució d'algunes de les qüestions formulades.

És important que l'alumne s'habitui a l'ús de la biblioteca, consultant en particular la bibliografia proposada. Aconsellem també l'ús d'algun manipulador algebraic, com per exemple SAGE, per alleugerir càlculs rutinaris i per obtenir representacions gràfiques que ajudin a visualitzar diferents objectes geomètrics.

S'insistirà també en la correcta utilització del llenguatge matemàtic. En aquest moment de la seva formació l'alumne ha de consolidar la seva capacitat d'expressar amb precisió conceptes i raonaments. En particular, serà important que aprengui a transformar les intuïcions geomètriques en arguments rigorosos. Aquestes habilitats es treballaran de forma intensiva a les classes de problemes i als seminaris.

Nota: es reservaran 15 minuts d'una classe, dins del calendari establert pel centre/titulació, per a la complementació per part de l'alumnat de les enquestes d'avaluació de l'actuació del professorat i d'avaluació de l'assignatura/mòdul.

Activitats formatives

Títol	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Tipus: Dirigides			
Classes de problemes	30	1,2	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13
Classes de teoria	45	1,8	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13
Tutories	15	0,6	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13
Tipus: Supervisades			
Classes de seminari	28	1,12	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13
Tipus: Autònomes			
Estudi personal	160	6,4	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13

Avaluació

La nota de l'avaluació continuada de l'assignatura, AC, s'obtindrà a partir de:

1. les notes de dos exàmens parcials, E1 i E2,
2. la nota del lliurament d'exercicis (provinents de les classes de problemes o dels seminaris), P,

d'acord amb la fórmula: $AC = 0,30 E1 + 0,45 E2 + 0,25 P$.

L'alumne supera l'assignatura si AC és superior o igual a 5. En cas contrari, l'alumne disposa d'un examen de recuperació que donarà lloc a una nota ER. L'examen de recuperació pot utilitzar-se per millorar nota però, en tots els cassos, la nota ER substituirà la suma de les notes dels dos exàmens parcials, E1 + E2. La nota P de lliurament d'exercicis NO és recuperable i per tant la nota ER de l'examen de recuperació tindrà un pes del 75% en la nota final. Per poder assistir a la recuperació, l'alumne ha hagut d'haver estat avaluat prèviament d'activitats d'avaluació continuada que equivalguin a 2/3 de la nota final.

Les Matricules d'Honor s'assignaran en funció de la nota d'avaluació continuada AC, en els casos que es consideri oportú.

Es considera que l'alumne es presenta a l'avaluació del curs si ha participat en activitats d'avaluació que superin el 50% del total. En cas contrari la seva qualificació serà de No Avaluable.

Activitats d'avaluació

Títol	Pes	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Examen E1	30%	4	0,16	1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12
Examen E2	45%	4	0,16	1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12
Examen de recuperació ER	75%	4	0,16	2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12
Lliurament d'informes i problemes P	25%	10	0,4	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

Bibliografia

1. Manfredo P. do Carmo. Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza Editorial. 1990
3. Sebastián Montiel y Antonio Ros. Curvas y superficies. Proyecto Sur. 1998
4. Michael Spivak. Cálculo en Variedades. Ed. Reverté. 1970
5. Joan Girbau. Geometría diferencial i relativitat. Manuals de la UAB. 1993

Llibres en format electrònic:

2. Theodore Shifrin. Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces. 2021 (accessible a pàgina personal de l'autor)
6. Victor A. Toponogov. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Birkhäuser. 2006 (accessible a la biblioteca de la UAB)
7. Shoshichi Kobayashi. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Springer. 2019 (accessible a la biblioteca de la UAB)

Programari

En alguns dels seminaris s'utilitzarà el programa SageMath