

**Funcions de variable real**

Codi: 100087  
Crèdits: 12

**2024/2025**

Titulació	Tipus	Curs
2500149 Matemàtiques	FB	1

**Professor/a de contacte**

Nom: Juan Jesús Donaire Benito

Correu electrònic: [juanjesus.donaire@uab.cat](mailto:juanjesus.donaire@uab.cat)

**Equip docent**

Josep Maria Burgues Badia

Arturo Nicolau Nos

Juan Eugenio Mateu Bennassar

Joaquín Martín Pedret

Marc Magaña Centelles

Laura Prat Baiget

**Idiomes dels grups**

Podeu consultar aquesta informació al [final](#) del document.

**Prerequisits**

Per tal que un alumne pugui seguir l'assignatura amb normalitat és imprescindible que tingui una certa destresa en la manipulació algebraica de fraccions, expressions que continguin arrels i potències, resolució de sistemes lineals i aritmètica bàsica de nombres i polinomis. També és molt aconsellable que l'estudiant tingui coneixements de trigonometria, raons trigonomètriques de la suma, angle doble,...

Finalment, és d'esperar que l'estudiant pugui fer, sense gaire dificultat, la representació gràfica de funcions d'una variable, interpretar la derivada d'una funció i calcular primitives relativament senzilles. Pressuposem també que la persona que cursa aquesta assignatura està familiaritzada amb raonaments de tipus lògic i que sap negar frases o proposicions

El requisit més important és, però, una gran curiositat per entendre i aprofundir en els conceptes que s'estudiaran.

**Objectius**

A nivell de coneixements, l'objectiu de l'assignatura és que l'estudiant aprengui sòlidament els conceptes bàsics del Càlcul Infinitesimal: les funcions de variable discreta (successions) o contínua, el concepte de canvi (límits, derivades) i la teoria d'integració.

A nivell de competències, també és un objectiu bàsic assolir una destresa important en la manipulació i càlcul de límits, derivades i integrals i saber aplicar els teoremes fonamentals d'aquesta teoria.

Finalment, hi ha també un objectiu formatiu de caràcter genèric: que l'alumne comenci a desenvolupar la capacitat d'anàlisi, de raonar rigorosament i de crear i redactar demostracions de resultats de manera rigorosa.

## Competències

- Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
- Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
- Calcular, reproduir determinades rutines i processos matemàtics amb agilitat
- Comprendre i utilitzar el llenguatge matemàtic
- Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
- Formular hipòtesis i imaginar estratègies per confirmar-les o refutar-les.
- Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
- Utilitzar aplicacions informàtiques d'anàlisi estadística, càlcul numèric i simbòlic, visualització gràfica, optimització o altres per experimentar en Matemàtiques i resoldre problemes

## Resultats d'aprenentatge

1. Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
2. Assimilar els conceptes i el objectes matemàtiques propis de l'assignatura, que apareixen als seus continguts.
3. Calcular derivades de funcions mitjançant la regla de la cadena, el Teorema de la Funció Implícita, etc.
4. Calcular i estudiar extrems de funcions.
5. Calcular integrals de funcions d'una variable.
6. Contrastar, si és possible, l'ús del càlcul amb l'ús de l'abstracció per tal de resoldre un problema. Avaluat els avantatges i desavantatges dels dos mètodes.
7. Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
8. Demostrar el coneixement dels objectes propis del càlcul amb funcions d'una variable real i de les seves propietats i utilitats.
9. Desenvolupar estratègies autònomes per la resolució de problemes com identificar el camp de problemes propis del curs, discriminar els problemes rutinaris dels no rutinaris, dissenyar una estratègia a priori per resoldre un problema, avaluar la estratègia i modificar-la si cal i traduir en el context d'un problema concret resultats teòrics que poden ser útils per resoldre'l.
10. Llegir i comprendre un text de matemàtiques del nivell del curs.
11. Manipular desigualtats i successions, analitzar i dibuixar funcions, deduir propietats d'una funció a partir del gràfic, comprendre i treballar intuïtivament, geomètrica i formalment amb les nocions de límit, derivada i integral.
12. Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.

13. Redactar de manera ordenada i amb precisió petits textos matemàtics (exercicis, resolució de qüestions de teoria,...)
14. Resoldre problemes que impliquen el plantejament d'integrals (longituds, àrees, volums, etc.)
15. Saber explicar idees i conceptes matemàtics propis del curs, així com saber comunicar a tercers raonaments propis
16. Seguir i comprendre una explicació oral d'un tema de matemàtiques relacionat amb el curs.

## Continguts

El programa de l'assignatura està organitzat en sis capítols:

### I. La recta real.

- Els nombres racionals i la seva incompletitud.
- Suprem i ínfim d'un conjunt.
- El concepte de número real. Axiomàtica. Expressió decimal.
- Operacions i desigualtats entre números real.
- Números reals distingits:  $\pi$  i  $e$

### II. Successions de números reals.

- Funcions reals de variable discreta o contínua
- Límit d'una successió. Propietats algebraïques.
- Successions monòtones.
- Punts d'acumulació. Successions parcials. Límit superior i límit inferior.
- El Teorema de Bolzano-Weierstrass.
- Successions de Cauchy i reenunciat de l'axioma de completitud.
- Càlcul de límits.

### III. Continuitat de funcions.

- Funcions de variable real. Domini d'una funció.
- Límit d'una funció en un punt, límits laterals. Propietats bàsiques dels límits. Asímptotes.
- Infinitèsims equivalents.
- Continuitat d'una funció.
- Teorema de Bolzano, localització d'arrels. Teorema dels valors intermedis.
- Extrems absoluts d'una funció. Teorema de Weierstrass.
- Funcions monòtones. Existència de límits laterals. Conjunts de discontinuïtat de funcions monòtones.
- Funcions inverses.
- Funcions exponencials i trigonomètriques i les seves inverses.

### IV. Càlcul diferencial.

- Derivada d'una funció en un punt com a taxa instantània de variació: interpretació geomètrica.
- La funció derivada. Caracterització de les funcions constants.
- Propietats algebraïques de la derivada.
- Regla de la cadena. Derivació de la funció inversa.
- Extrems relatius d'una funció.
- Teorema de Rolle. Teoremes del valor mitjà. Teorema de Darboux.
- Aproximació de zeros de funcions. Obtenició de desigualtats. Regla de l'Hôpital.

### V. Aproximació per polinomis de Taylor.

- Ordre de contacte entre funcions.
- Polinomi de Taylor. Propietats.
- Polinomis de Taylor de funcions elementals.
- La fórmula de Taylor com a aproximació local.

- Convexitat de funcions. Convexitat i continuïtat.
- Estudi local d'una funció.

## VI. Integral de Riemann.

- El problema de l'àrea.
- Sumes superiors i inferiors de funcions acotades.
- Funcions integrables. Integral.
- El Teorema Fonamental del Càlcul.
- Càlcul d'integrals mitjançant el càlcul de primitives. El Teorema del canvi de variable i la fórmula d'integració per parts.
- Aplicacions geomètriques de la integral.
- Densitats, masses i centres de masses.
- Irracionalitat de  $\pi$ .

## Activitats formatives i Metodologia

Títol	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Tipus: Dirigides			
Classes de teoria	60	2,4	
Tipus: Supervisades			
Activitats tutoritzades	12	0,48	
Classes de problemes	30	1,2	
Tipus: Autònomes			
Estudi de teoria	44	1,76	
Preparació d'exàmens	40	1,6	
Realització de problemes	100	4	

L'assignatura disposa de un grup de dos grups de teoria, dos grups de problemes i quatre grups de seminaris.

Els horaris de les sessions els podreu trobar a la web de la Facultat o bé a

<https://web02.uab.es:31501/pds/consultaPublica/look%5Bconpub%5DInicioPubHora?entradaPublica=true&idiom>

Al Moodle de l'assignatura, l'estudiant tindrà a la seva disposició el material necessari per seguir totes les sessions. Allà podran trobar-se, apunts, llistes de problemes, exàmens de cursos anteriors, notícies que puguin ser rellevants per al desenvolupament de l'assignatura i, eventualment, altres materials que siguin d'interès per a l'alumnat.

Sessions de teoria. En aquestes sessions el professorat explicarà els conceptes i resultats de l'assignatura. És bàsic que, abans de cada sessió, l'estudiant hagi treballat els continguts exposats a sessions anteriors.

Sessions de problemes. De manera regular, es faran públiques les llistes de problemes i exercicis que es treballaran a classe. L'alumnat ha de pensar-se els problemes amb abnegació. Per treballar sobre el que l'alumnat ha fet de manera individual, en aquestes sessions, el professorat resoldrà o donarà indicacions sobre alguns dels problemes de les llistes d'exercicis i es comentaran possibles solucions proposades per

l'alumnat. És essencial que l'alumne realitzi un treball individual amb regularitat a partir de les llistes. Pensar-se els problemes, encara que no surtin, i dedicar-hi temps és essencial per poder enfrontar-se a aquesta assignatura amb garanties.

Seminaris. Els seminaris són activitats de treball en grup sota la supervisió d'un professor tutor. Cada sessió seguirà un guió que es publicarà prèviament a l'aula Moodle. En aquestes sessions, es treballaran aspectes de caire pràctic i monogràfic, de manera que l'estudiant adquireixi una certa expertesa en l'aplicació (assimilació de determinades tècniques per resoldre determinats tipus d'exercicis).

Finalment, es recorda que els alumnes disposaran d'unes hores de tutoria al despatx dels professors de teoria, de problemes i de seminaris, on podran consultar dubtes i demanar tota mena d'ajut en el seu treball. L'horari per a cada professor serà anunciat a l'aula Moodle.

Nota: es reservaran 15 minuts d'una classe, dins del calendari establert pel centre/titulació, per a la complementació per part de l'alumnat de les enquestes d'avaluació de l'actuació del professorat i d'avaluació de l'assignatura/mòdul.

## Avaluació

### Activitats d'avaluació continuada

Títol	Pes	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Examen semestral febrer	30	2	0,08	7, 1, 2, 4, 3, 6, 11, 8, 9, 13, 16, 15, 10, 12
Exàmen semestral Juny	35	2	0,08	7, 1, 2, 4, 3, 5, 6, 11, 8, 9, 13, 16, 15, 10, 14, 12
Proves parcials i avaluació continuada	30	10	0,4	

L'assignatura té una única convocatòria que es tanca al Juliol.

Hi haurà dues proves curtes, una per quadrimestre, que proporcionaran una qualificació T.

Algunes sessions de seminaris seran avaluable. D'aquestes proves s'obtindrà una qualificació S.

Hi haurà dues proves parcials a final de cada quadrimestre amb qualificacions P1, P2.

A partir d'aquestes activitats s'obtindrà una nota d'avaluació Final, donada per

$$\text{Final} = 0,2 T + 0,15 S + 0,3 P1 + 0,35 P2$$

Si la nota Final és superior o igual a 5, l'alumne ha superat l'assignatura. Els alumnes que no hagin superat l'assignatura podran presentar-se a una prova final de recuperació on podrà recuperar el 85% de la nota.

### **Avaluació única.**

Els estudiants que ho hagin sol·licitat poden acollir-se a la modalitat d'avaluació única (mireu la web de la Facultat). L'avaluació única suposa la renúncia irrevocable al dret a l'avaluació continuada.

L'estudiant que s'acollí a aquesta modalitat d'avaluació realitzarà, en la data del segon parcial, tres proves: una prova oral de teoria, una prova escrita de problemes i una prova escrita corresponent als continguts dels seminaris. El pes corresponent a cada part és d'un 25% la part de teoria, un 60% la de problemes i un 15% la de seminaris.

Si l'estudiant no supera l'assignatura, podrà optar a l'examen de recuperació en els mateixos termes que la resta de l'alumnat.

## Bibliografia

### BIBLIOGRAFIA BÀSICA

- M. Spivak. Calculus. Càlcul Infinitesimal. Ed. Reverté, Barcelona 1995.

L'assignatura de Funcions de Variable Real consisteix, essencialment, en les tres primeres parts d'aquest llibre. És un llibre altament recomanable, molt ben escrit i inclou problemes molt il·lustratius. L'ordre seguit i alguns detalls referents a algunes nocions poden diferir lleugerament de les que presentarem al curs.

- J. M. Ortega. Introducció a l'Anàlisi Matemàtica. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona 4, Bellaterra 1990.

El nostre curs consisteix en els cinc primers capítols d'aquest llibre. Aquest text serà d'utilitat en alguns aspectes del curs com a complement de la referència bàsica.

- W. Rudin. Principios de Análisis Matemático. Ed. McGraw-Hill. 1980.

Llibre de contingut més avançat que serà útil també en cursos posteriors. Molt bona selecció de problemes.

- R. Courant, H. Robbins. ¿Qué es la matemática? Aguilar, 1979.

Segons una autoritat acadèmica actual: "Un clásico. Un libro de contenido más general que proporciona una magnífica visión global de la matemática."

- G. Flory. Ejercicios de topología y de análisis. Tomos 1, 2. Ed. Reverté, 1983.

Bons llibres de problemes de tipus més conceptual. Las parts que corresponen a aquest curs són el capítol 1 del volum 1 i els capítols 5, 6, 7 del volum 2. Es tracta de llibres que seran útils també en cursos posteriors.

- B.P. Demidovich. 5000 problemas de Análisis Matemático. Paraninfo. 2000.

Llibre amb una completa selecció de problemes pràctics. Molt adient per exercitar conceptes i afiançar destresa de càlcul.

## Programari

No està previst l'ús de cap software ni d'altres recursos informàtics

## Llista d'idiomes

Nom	Grup	Idioma	Semestre	Torn
(PAUL) Pràctiques d'aula	1	Català	anual	matí-mixt
(PAUL) Pràctiques d'aula	2	Català	anual	matí-mixt
(SEM) Seminaris	1	Català	anual	matí-mixt
(SEM) Seminaris	2	Català	anual	matí-mixt
(SEM) Seminaris	3	Català	anual	matí-mixt

(SEM) Seminaris	4	Català	anual	matí-mixt
(TE) Teoria	1	Català	anual	matí-mixt
(TE) Teoria	2	Català	anual	matí-mixt

PROVISIONAL