

## Topologia

Codi: 100106  
Crèdits: 6

2024/2025

Titulació	Tipus	Curs
2500149 Matemàtiques	OB	3

### Professor/a de contacte

Nom: Wolfgang Karl David Pitsch

Correu electrònic: wolfgang.pitsch@uab.cat

### Equip docent

Carlos Broto Blanco

Roger Bergadà Batlles

### Idiomes dels grups

Podeu consultar aquesta informació al [final](#) del document.

### Prerequisits

L'experiència en la docència d'aquesta assignatura demostra que és extraordinàriament important que l'alumne hagi assimilat, abans d'iniciar el curs, els fonaments bàsics del que és el raonament matemàtic deductiu. Cal tenir experiència en el mètode axiomàtic, cal conèixer els principis més bàsics de la lògica matemàtica, convé estar familiaritzat amb el que és un raonament matemàtic correcte i el que no ho és, amb els diversos paradigmes de la demostració matemàtica (reducció a l'absurd, aportació d'un contraexemple, pas al contrarecíproc, etc.). Cal estar habilitat en la negació d'una proposició, en l'ús dels quantificadors ("existeix un  $x$  tal que", "per a tot  $x$  es compleix tal cosa") i en la idea d'implicació ( $a$  implica  $b$ ,  $a$  no implica  $b$ ,  $a$  si i només si  $b$ ).

Com que una bona part de l'assignatura es basa en reformular des d'un punt de vista més general una sèrie de conceptes que es coneixen en el context dels espais mètrics, és important que l'alumne tingui un bon domini de la topologia dels espais mètrics i, en particular, la topologia de l'espai euclidià. En particular és molt recomanable que l'alumne hagi superat els cursos de càlcul i geometria de cursos anteriors.

### Objectius

L'objectiu principal del curs és que l'alumne compregui que una topologia en un conjunt és l'estructura natural per a tractar la idea bàsica de la continuïtat.

Hi ha problemes, formulats inicialment sobre objectes geomètrics, que no depenen de distàncies, d'angles o d'alineacions, sinó d'una mena de connexió contínua entre els punts que componen l'objecte. Són els problemes topològics. El concepte d'espai topològic, de manera anàloga a com el concepte d'espai vectorial

va sorgir per modelar els espais euclidians, en un principi volia modelar els objectes geomètrics com, per exemple, les superfícies de l'espai, però ben aviat va transcendir aquest marc i ràpidament la topologia va fer-se present (i indispensable) en totes les branques de les Matemàtiques.

Estudiarem conceptes que l'alumne ja coneix en el cas dels espais mètrics en un context més general. Parlarem d'oberts i tancats, de continuïtat i espais compactes. Pot semblar, doncs, que aquest curs és una repetició gratuïta de coses conegudes però va més enllà. És d'esperar, però, que l'alumne se n'adoni que aquest nou punt de vista és molt més general i, principalment, molt més flexible, que el punt de vista mètric.

## Competències

- Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
- Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
- Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
- Demostrar una elevada capacitat d'abstracció.
- Identificar les idees essencials de les demostracions d'alguns teoremes bàsics i saber-les adaptar per obtenir altres resultats
- Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
- Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
- Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
- Que els estudiants sàpiguen aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseeixin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.

## Resultats d'aprenentatge

1. Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
2. Construir exemples d'espais topològics utilitzant les nocions de subespai topològic, espai producte i espai quocient.
3. Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
4. Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
5. Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
6. Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
7. Que els estudiants sàpiguen aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseeixin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.
8. Reconèixer topològicament les superfícies compactes i la seva classificació.
9. Utilitzar els conceptes bàsics associats a les nocions d'espai mètric i espai topològic: compacitat i connexió.

## Continguts

1. Topologia dels espais mètrics.  
Boles, oberts, continuïtat, convergència, completació. Topologia dels espais vectorials normats.
2. L'axiomàtica d'espai topològic.  
Aberts, tancats, entorns. adherència. Continuïtat.
3. Subespais topològics.
4. La topologia producte
5. La topologia quocient.
6. Espais de Hausdorff: axiomes de separació.
7. Espais compactes.
8. Connexió i connexió per camins.
9. Grup fonamental.
10. El teorema de classificació de les superfícies compactes.

## Activitats formatives i Metodologia

Títol	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Tipus: Dirigides			
Classes de problemes	14	0,56	
Classes de teoria	30	1,2	
Seminaris	6	0,24	
Tipus: Autònomes			
Temps d'estudi personal	85	3,4	

El número d'hores dirigides descrites a continuació es poden veure afectades i modificades per les mesures que les autoritats decretin per afrontar la situació de pandèmia amb la qual s'inicia el curs.

Hi ha 30 hores destinades al desenvolupament de conceptes, exemples i resultats, 15 hores de treball de resolució i discussió de problemes i reptes i 6 hores de seminaris per aprofundir en qüestions paral·leles/complementàries. Això representa 51 hores (a l'aula, en format virtual o en forma de material disponible al CV). Se suposa que l'assignatura requereix 150 hores de dedicació de l'estudiant (25 h/crèdit x 6 crèdits = 150 h). Cal ser conscients que això significa que l'aprenentatge es basa essencialment en el treball personal de l'alumne. Tanmateix, en Matemàtiques (com passa en moltes altres àrees de l'activitat humana: la música, l'esport...), la mera observació de com el professor resol determinats problemes té un valor molt limitat. El coneixement només s'assoleix quan l'alumne intenta atacar aquests mateixos problemes de manera autònoma i crítica.

En aquesta assignatura, la importància de la capacitat d'utilitzar correctament el raonament lògic-deductiu és cabdal, per damunt de l'adquisició de coneixements concrets de topologia. Es donarà molta importància, doncs, a l'entrenament en

- La generació de raonaments correctes.
- La detecció dels raonaments incorrectes.
- La capacitat de comunicar els raonaments correctes utilitzant amb rigor el llenguatge matemàtic.

El paper dels seminaris serà treballar per aconseguir aquests tres objectius.

Convé insistir en que la millor metodologia de treball és la que es basa en estudiar cada dia. Si això no es fa, les classes esdevenen avorrides i incomprensibles, perquè ja sabem que en Matemàtiques els coneixements es disposen sempre els uns sobre els altres, de manera piramidal. Aquest estudi individual i autònom ha d'anar sempre lligat a l'exercici de la comunicació matemàtica escrita. Cal saber escriure sobre un paper, de manera lineal i semànticament correcta (en el paradigma de la semàntica matemàtica), les idees que puguem tenir al cap sobre la resolució d'un determinat problema.

S'usarà el Campus Virtual com a mitjà de comunicació. Al CV s'hi publicaran els apunts del curs, les llistes d'exercicis i tots els materials docents que s'utilitzin.

Nota: es reservaran 15 minuts d'una classe, dins del calendari establert pel centre/titulació, per a la complementació per part de l'alumnat de les enquestes d'avaluació de l'actuació del professorat i d'avaluació de l'assignatura/mòdul.

## Avaluació

### Activitats d'avaluació continuada

Títol	Pes	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Avaluació de seminaris	20%	6	0,24	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Examen Final	50%	3	0,12	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Examen Parcial	30%	3	0,12	2, 3, 4, 5, 6, 7, 9
Exàmen de recuperació	80%	3	0,12	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Hi haurà una avaluació específica de l'activitat desenvolupada en els seminaris, que comptarà un 20% de la nota final. La assistència als seminaris es obligatoria.

Hi haurà dues proves escrites: un examen parcial a meitat del semestre (30% de la nota final) i un examen final (50% de la nota final).

Cal treure un mínim de 3.5 a l'examen final per aprovar l'assignatura en avaluació continuada. Si no s'arriba a 3.5, cal anar a la prova de recuperació per aprovar l'assignatura. Si l'alumne no es presenta a recuperació su nota final sera la del examen final.

A l'examen de recuperació es recuperan els examens parcial i final. L'alumne qui aprovi el examen de recuperación (amb la nota de seminari) rebrà la qualificació final de 5 (aprobat).

Es considerarà que un alumne s'ha presentat a l'assignatura si ha realitzat activitats d'avaluació que representin un pes igual o superior al 50% de la nota final del curs. Si no és el cas, es considerarà 'No avaluable'.

### Evaluació única

L'alumnat que s'hagi acollit a la modalitat d'avaluació única haurà de realitzar una prova escrita el dia del examen final. Seguidament haurà de fer una prova oral de resolució de un problema y de comentari sobre un del seminaris elegits per el profesorat. El alumne entregará els 3 seminaris redactats al inici de la prova escrita. La assistència als seminaris es obligatoria.

La qualificació de l'estudiant serà la mitjana ponderada de les dues activitats anteriors, on l'examen de teoria suposará el 50% de la nota, l'examen oral el 50%.

Si la nota final no arriba a 5, l'estudiant té una altra oportunitat de superar l'assignatura mitjançant l'examen de recuperació que tindrà un pes de 50% de la nota final; la prova oral no es recuperable. L'alumne qui aprovi amb el examen de recuperació rebrà la qualificació final de 5 (aprobat) independentment de la nota de la prova.

## Bibliografia

Bibliografia bàsica:

- Jaume Aguadé, *Apunts d'un curs de topologia elemental*. <http://mat.uab.es/~aguade/teaching.html>
- Czes Kosniowski, *A first course in algebraic topology*. Cambridge University Press 1980.

Bibliografia pel tema de superfícies compactes:

- William S. Massey, *A basic course in algebraic topology*. Springer-Verlag 1991.
- John M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, Graduate Text in Mathematics 202, Springer, 2011

Bibliografia més completa per anar una mica més enllà:

- James Munkres, *General Topology*, Prentice-Hall, 2000.
- Ryszard Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics 6, Heldermann Verlag, 1989.
- James Dugundji, *Topology*, Reprinting of the 1966 original. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., Boston. 1978.

Recursos lliures online:

- Marta Macho-Stadler, *Topología*, <https://www.ehu.es/~mtwmastm/Topologia1415.pdf>
- Jesper Moller, *General Topology*, <http://web.math.ku.dk/~moller/e03/3gt/notes/gtnotes.pdf>
- O. Viro, O Ivanov, N. Netsvetaev, V. Kharlamov, *Elementary Topology Problem Textbook*, <http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/topoman/eng-book-nopfs.pdf>

Un punt de vista diferent amb aplicacions:

- Colin Adams, Robert Franzosa, *Introduction to Topology: Pure and Applied*, Prentice-Hall, 2008

## Programari

Aquest assignatura no fa ús de programari obligatori més enllà del sistema TeX per a l'entrega de seminaris

## Llista d'idiomes

Nom	Grup	Idioma	Semestre	Torn
(PAUL) Pràctiques d'aula	1	Català	primer quadrimestre	matí-mixt
(PAUL) Pràctiques d'aula	2	Català	primer quadrimestre	matí-mixt
(SEM) Seminaris	1	Català	primer quadrimestre	matí-mixt
(SEM) Seminaris	2	Català	primer quadrimestre	matí-mixt

