

Titulació	Tipus	Curs
2500149 Matemàtiques	OB	3

Professor/a de contacte

Nom: Florent Nicolas Balacheff

Correu electrònic: florent.balacheff@uab.cat

Equip docent

Wolfgang Karl David Pitsch

Alejandro Garcia Sanchez

David Marín Pérez

Idiomes dels grups

Podeu consultar aquesta informació al [final](#) del document.

Prerequisits

A l'hora d'assimilar els continguts de l'assignatura, serà convenient tenir un bon coneixement previ de Càlcul en diverses variables (diferenciabilitat, difeomorfisme, teorema de la funció inversa i integració), Algebra i geometria lineals (espais euclidiàns, formes bilineals, diagonalització d'endomorfismes autoadjunts), i de Topologia (obert, connexitat, homeomorfisme). També es faran servir resultats de les assignatures d'Equacions diferencials (teorema d'existència i unicitat de solucions, i cas particular dels sistemes d'equacions diferencials lineals), i de Fonaments de les matemàtiques (grup simètric).

Objectius

La Geometria Diferencial és clau a l'hora d'entendre el món que ens envolta. Serveix com a fonament de la física teòrica, donant-li el marc rigorós necessari per a la formalització d'algunes de les seves teories, des de l'Electrodinàmica clàssica de Maxwell fins a la Relativitat Restringida i la Relativitat General d'Einstein. La geometria també ens ensenya com podem pensar en dimensions més grans que l'espai tridimensional en què vivim, i obre el nostre horitzó de reflexió.

L'objectiu fonamental d'aquesta assignatura és entendre com es pot flexibilitzar els objectes geomètrics lineal que són els subespais afins, en objectes geomètrics corbats.

Estudiarem en primer lloc les corbes parametritzades de l'espai euclidià, descrivint els diferents invariants que podem definir segons la dimensió en què es desenvolupen: curvatura en qualsevol dimensió, curvatura amb signe en dimensió 2, i finalment torsió i referència de Frenet en dimensió 3. En segon lloc explicarem com

podem generalitzar les corbes, pensades com objectes non-lineals unidimensionals, a la dimensió superior. Serà l'introducció del concepte de subvarietats que necessitarà explorar l'estructura local de les aplicacions diferenciables infinitesimalment injectives o exhaustives (immersions i submersions). Aquest nou concepte de subvarietat serà indispensable a l'hora d'entendre els continguts que se presentaran a les optatives de Topologia de les varietats i Geometria riemanniana de 4rt curs. En una tercera part, estudiarem profundament aquest nou concepte en el cas molt particular que correspon a la nostra realitat quotidiana. Serà la noció de superfícies regulars, per les quals definirem la noció de primera i segona forma fonamental, i de curvatura. També estudiarem com es comportan les corbes sobre aquests objectes geomètrics, fent la relació entre els invariants descrits dins la primera part de l'assignatura i aquesta tercera. A més introduïrem famílies especials de corbes sobre les superfícies com les geodèsiques, les línies de curvatura i les línies asimptòtiques. En l'última part, presentarem la noció de forma diferencial. Aquí, tornarem a fer un salt en el grau d'abstracció fins a definir la noció d'integració de formes diferencials en les subvarietats descrites a la segona part. La recompensa d'aquest treball teòric serà l'obtenció del teorema de Stokes que serà la conclusió del recorregut proposat en aquesta assignatura.

Competències

- Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
- Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
- Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
- Demostrar una elevada capacitat d'abstracció.
- Identificar les idees essencials de les demostracions d'alguns teoremes bàsics i saber-les adaptar per obtenir altres resultats
- Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
- Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.
- Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
- Que els estudiants sàpiguen aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseeixin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.
- Reconèixer la presència de les Matemàtiques en altres disciplines
- Utilitzar aplicacions informàtiques d'anàlisi estadística, càlcul numèric i simbòlic, visualització gràfica, optimització o altres per experimentar en Matemàtiques i resoldre problemes

Resultats d'aprenentatge

1. Aplicar l'esperit crític i el rigor per validar o refutar arguments tant propis com de d'altres.
2. Aplicar les integrals de línia i superfície per reconèixer algunes propietats globals de corbes i superfícies.
3. Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs
4. Entendre les aplicacions del càlcul vectorial i de la geometria diferencial a problemes de la física.
5. Que els estudiants hagin demostrat posseir i comprendre coneixements en un àrea d'estudi que parteix de la base de l'educació secundària general, i se sol trobar a un nivell que, si bé es recolza en llibres de text avançats, inclou també alguns aspectes que impliquen coneixements procedents de l'avantguarda del seu camp d'estudi.
6. Que els estudiants hagin desenvolupat les habilitats d'aprenentatge necessàries per a emprendre estudis posteriors amb un alt grau d'autonomia.

7. Que els estudiants puguin transmetre informació idees, problemes i solucions a un públic tan especialitzat com no especialitzat
8. Que els estudiants sàpiguen aplicar els seus coneixements al seu treball o vocació d'una forma professional i posseïxin les competències que solen demostrar-se per mitjà de l'elaboració i defensa d'arguments i la resolució de problemes dins de la seva àrea d'estudi.
9. Reconèixer la naturalesa dels punts d'una corba en R^3 . Càlcul de curvatura i torsió.
10. Reconèixer la naturalesa dels punts d'una superfície en R^3 . Càlcul de la curvatura de Gauss, curvatura mitjana i curvatures principals.
11. Reconèixer topològicament les superfícies compactes i la seva classificació.
12. Saber plantejar i resoldre integrals curvilínies i integrals de superfície.
13. Usar algun tipus de programari científic per realitzar càlculs i visualitzar superfícies

Continguts

1. Corbes Parametritzades

- 1.1. *Corbes parametritzades de R^n* : definicions, longitud, canvi de paràmetre, paràmetre d'arc, curvatura i vector normal.
- 1.2. *Geometria de les corbes de R^2* : curvatura amb signe, punts singulars.
- 1.3. *Geometria de les corbes de R^3* : torsió i fórmules de Frenet, forma canònica local, teorema fonamental de la teoria local, torsió i fórmules de Frenet dins el cas general.

2. Subvarietats

- 2.1. *Estructura local de les immersions i submersions*: definicions, teoremes d'estructura local.
- 2.2. *Subvarietats*: definició, caracteritzacions, parametritzacions locals, espai tangent, aplicacions diferenciables.

3. Superfícies Regulars

- 3.1. *Primera forma fonamental*: definició, calcul de longitud, àrea, isometries.
- 3.2. *Segona forma fonamental*: orientació, definició, curvatures principals, de Gauss, i mitjana, expressió local, curvatura normal, línies de curvatura i asimptòtiques.
- 3.3. *Teorema Egregium de Gauss*: símbols de Christoffel, expressió de la curvatura de Gauss.
- 3.4. *Geodèsiques*: camp vectorial al llarg d'una corba, derivada covariant, transport paral·lel, geodèsica, curvatura geodèsica.

4. Formes Diferencials

- 4.1. *Camps vectorials de R^n* : definicions, corbes integrals.
- 4.2. *Àlgebra multilínea*: formes multilíneas, producte exterior, avaluació via el determinant, descomposició.
- 4.3. *Formes diferencials sobre R^n* : definició, diferencial exterior, pullback, forma volume sobre R^n .
- 4.4. *Subvarietats amb vora*: definicions, camps vectorials, formes diferencials i orientació.
- 4.5. *Integració i teorema de Stokes*: integració de formes diferencials, teorema de Stokes.

Activitats formatives i Metodologia

Títol	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Tipus: Dirigides			
Classes de problemes	30	1,2	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13

Classes de teoria	45	1,8	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13
Tipus: Supervisades			
Classes de seminari	28	1,12	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13
Tipus: Autònomes			
Estudi personal	178	7,12	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13

L'assignatura disposa de tres hores de classe de teoria, dos de problemes, i dos de seminaris/pràctiques a la setmana durant 15 setmanes del curs.

A les classes de teoria s'introduiran els conceptes fonamentals i s'explicaran els temes del programa tot encoratjant els estudiants a preguntar i participar activament a classe.

A les classes de problemes es resoldran exercicis i s'analitzaran qüestions que aclareixin i desenvolupin les nocions introduïdes a les classes de teoria. Aquest treball es durà a terme mitjançant les explicacions fetes pel professor a la pissarra i la participació activa dels estudiants en la discussió dels diferents arguments emprats per tal de solucionar els problemes, que l'alumne haurà d'haver pensat prèviament en hores d'estudi, individualment o en grup.

Les sessions de seminari estan principalment dedicades a desenvolupar alguns temes per part de l'alumne, però també a aprofundir de forma autònoma en les qüestions tractades a classe de teoria. Durant la sessió, els alumnes donaran resposta a les qüestions plantejades guiats pels professors que resoldran dubtes puntuals i comentaran els aspectes més importants del tema a desenvolupar. En finalitzar cada sessió els professors informaran als alumnes si han d'entregar un informe per escrit amb la resolució d'algunes de les qüestions formulades.

A part d'això està previst l'entrega per part de l'alumnat d'exercicis personalitzats a resoldre en línia mitjançant la plataforma ACME.

Nota: es reservaran 15 minuts d'una classe, dins del calendari establert pel centre/titulació, per a la complementació per part de l'alumnat de les enquestes d'avaluació de l'actuació del professorat i d'avaluació de l'assignatura/mòdul.

Avaluació

Activitats d'avaluació continuada

Títol	Pes	Hores	ECTS	Resultats d'aprenentatge
Examen E1	30%	3	0,12	1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12
Examen E2	45%	3	0,12	1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12
Examen de recuperació ER	75%	3	0,12	2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12
Lliurament d'informes i problemes P	25%	10	0,4	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

La nota final (d'avaluació continuada) de l'assignatura es calcularà de la manera següent:

- Un 30% de la nota correspondrà a la realització d'un examen parcial.
- Un 25% de la nota correspondrà a lliuraments de problemes i/o pràctiques. En particular, l'assistència als seminaris és obligatòria.
- Un 45% de la nota correspondrà a la realització d'un examen final.

L'alumne supera l'assignatura si la seva nota final és superior o igual a 5.

A l'examen de recuperació es recuperen els examens parcial i final. L'alumne qui aprovi el examen de recuperació (amb la nota de seminaris/ACME) rebrà la qualificació final de 5 (aprobat).

Per poder assistir a la recuperació, l'alumne ha hagut d'haver estat avaluat prèviament d'activitats d'avaluació continuada que equivalguin a 2/3 de la nota final.

Després de l'examen final s'atorgaran les matrícules d'honor. Aquestes matrícules d'honor seran ja definitives. Es considera que l'alumne es presenta a l'avaluació del curs si ha participat en activitats d'avaluació que superin el 50% del total. En cas contrari la seva qualificació serà de No Avaluable.

L'avaluació única de l'assignatura constarà de les següents activitats d'avaluació:

- Realització de l'examen final, per un 45% de la nota.
- Lliurament el dia de l'examen final de les entregues demanades als seminaris, per un 25% de la nota final. En particular, l'assistència als seminaris és obligatòria.
- Realització d'un examen oral, per un 30% de la nota.

Bibliografia

Manfredo P. do Carmo. Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza Editorial (1990).

Theodore Shifrin. Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces. Accesible a la pàgina de l'autor (2021).

Sebastián Montiel y Antonio Ros. Curvas y superficies. Proyecto Sur (1998).

Michael Spivak. Cálculo en Variedades. Ed. Reverté (1970).

Victor A. Toponogov. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Birkhäuser (2006).

Shoshichi Kobayashi. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Springer (2019).

Programari

En alguns dels seminaris s'utilitzarà el programa SageMath.

Llista d'idiomes

Nom	Grup	Idioma	Semestre	Torn
(PAUL) Pràctiques d'aula	1	Català	segon quadrimestre	matí-mixt
(PAUL) Pràctiques d'aula	2	Català	segon quadrimestre	matí-mixt

(PLAB) Pràctiques de laboratori	1	Català	segon quadrimestre	matí-mixt
(PLAB) Pràctiques de laboratori	2	Català	segon quadrimestre	matí-mixt
(SEM) Seminaris	1	Català	segon quadrimestre	matí-mixt
(SEM) Seminaris	2	Català	segon quadrimestre	matí-mixt
(TE) Teoria	1	Català	segon quadrimestre	matí-mixt