

Titulación	Tipo	Curso
2500149 Matemáticas	OB	3

Contacto

Nombre: Florent Nicolas Balacheff

Correo electrónico: florent.balacheff@uab.cat

Equipo docente

Wolfgang Karl David Pitsch

Alejandro Garcia Sanchez

David Marín Pérez

Idiomas de los grupos

Puede consultar esta información al [final](#) del documento.

Prerrequisitos

A la hora de asimilar los contenidos de la asignatura, será conveniente tener un buen conocimiento previo de Cálculo en diversas variables (diferenciabilidad, difeomorfismo, teorema de la función inversa e integración), Álgebra y geometría lineales (espacios euclídeos, formas bilineales, diagonalización de endomorfismos autoadjuntos), y de Topología (abierto, conexidad, homeomorfismo).

También se utilizarán resultados de las asignaturas de Ecuaciones diferenciales (teorema de existencia y unicidad de soluciones, y caso particular de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales), y de Fundamentos de las matemáticas (grupo simétrico).

Objetivos y contextualización

La Geometría Diferencial es clave a la hora de entender el mundo que nos rodea. Sirve como fundamento de la física teórica, dándole el marco riguroso necesario para la formalización de algunas de sus teorías, desde la Electrodinámica clásica de Maxwell hasta la Relatividad Restringida y la Relatividad General de Einstein. La geometría también nos enseña cómo podemos pensar en dimensiones mayores que el espacio tridimensional en el que vivimos, y abre nuestro horizonte de reflexión.

El objetivo fundamental de esta asignatura es entender cómo se puede flexibilizar los objetos geométricos lineal que son los subespacios afines, en objetos geométricos curvados o retorcidos. Estudiaremos en primer lugar las curvas parametrizadas del espacio euclídeo, describiendo los diferentes

invariantes que podemos definir según la dimensión en la que se desarrollan: curvatura en cualquier dimensión, curvatura con signo en dimensión 2, y finalmente torsión y referencia de Frenet en dimensión 3. En segundo lugar explicaremos cómo podemos generalizar las curvas, pensadas como objetos no-lineales unidimensionales, en la dimensión superior. Será la introducción del concepto de subvariedades que necesitará explorar la estructura local de las aplicaciones diferenciables infinitesimalmente inyectivas o exhaustivas (inmersiones y sumersiones). Este nuevo concepto de subvariedad será indispensable a la hora de entender los contenidos que se presentarán en las optativas de Topología de las variedades y Geometría riemanniana de 4º curso. En un tercio lugar, estudiaremos profundamente este nuevo concepto en el caso muy particular que corresponde a nuestra realidad cotidiana. Será la noción de superficies regulares, por las que definiremos la noción de primera y segunda forma fundamental, y de curvatura. También estudiaremos cómo se comportan las curvas sobre estos objetos geométricos, haciendo la relación entre los invariantes descritos en la primera parte de la asignatura y esta tercera. Además introduciremos familias especiales de curvas sobre las superficies como las geodésicas, las líneas de curvatura o las líneas asintóticas. En la última parte, presentaremos la noción de forma diferencial. Aquí, volveremos a dar un salto en el grado de abstracción hasta definir la noción de integración de formas diferenciales en las subvariedades descritas en la segunda parte. La recompensa de este trabajo teórico será la obtención del teorema de Stokes, que será la conclusión del recorrido propuesto en esta asignatura.

Competencias

- Aplicar el espíritu crítico y el rigor para validar o refutar argumentos tanto propios como de otros.
- Asimilar la definición de objetos matemáticos nuevos, de relacionarlos con otros conocidos y de deducir sus propiedades.
- Demostrar de forma activa una elevada preocupación por la calidad en el momento de argumentar o hacer públicas las conclusiones de sus trabajos.
- Demostrar una elevada capacidad de abstracción.
- Identificar las ideas esenciales de las demostraciones de algunos teoremas básicos y saberlas adaptar para obtener otros resultados.
- Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.
- Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía.
- Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado.
- Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio.
- Reconocer la presencia de las Matemáticas en otras disciplinas.
- Utilizar aplicaciones informáticas de análisis estadístico, cálculo numérico y simbólico, visualización gráfica, optimización u otras para experimentar en Matemáticas y resolver problemas.

Resultados de aprendizaje

1. Aplicar el espíritu crítico y el rigor para validar o refutar argumentos tanto propios como de otros.
2. Aplicar las integrales de línea y superficie para reconocer algunas propiedades globales de curvas y superficies.
3. Demostrar de forma activa una elevada preocupación por la calidad en el momento de argumentar o hacer públicas las conclusiones de sus trabajos.
4. Entender las aplicaciones del cálculo vectorial y de la geometría diferencial a problemas de la física.
5. Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.

6. Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía.
7. Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado.
8. Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio.
9. Reconocer la naturaleza de los puntos de una curva en R^3 . Cálculo de curvatura y torsión.
10. Reconocer la naturaleza de los puntos de una superficie en R^3 . Cálculo de la curvatura de Gauss, curvatura media y curvaturas principales.
11. Reconocer topológicamente las superficies compactas y su clasificación.
12. Saber plantear y resolver integrales curvilíneas e integrales de superficie.
13. Usar algún tipo de software científico para realizar cálculos y visualizar superficies.

Contenido

1. Curvas parametrizadas

- 1.1. Curvas R^n parametrizadas: definiciones, longitud, cambio de parámetro, parámetro de arco, curvatura y vector normal.
- 1.2. Geometría de las curvas de R^2 : curvatura con signo, puntos singulares.
- 1.3. Geometría de las curvas R^3 : torsión y fórmulas de Frenet, forma canónica local, teorema fundamental de la teoría local, torsión y fórmulas de Frenet en el caso general.

2. Subvariedades

- 2.1. Estructura local de inmersiones y sumersiones: definiciones, teoremas de estructura local.
- 2.2. Subvariedades: definición, caracterizaciones, parametrizaciones locales, espacio tangente, aplicaciones diferenciables.

3. Superficies regulares

- 3.1. Primera forma fundamental: definición, cálculo de longitud, área, isometrías.
- 3.2. Segunda forma fundamental: orientación, definición, curvaturas principal, gaussiana y media, expresión local, curvatura normal, curvatura y líneas asintóticas.
- 3.3. Teorema del Egregium de Gauss: símbolos de Christoffel, expresión de la curvatura de Gauss.
- 3.4. Geodésicas: campo vectorial a lo largo de una curva, derivada covariante, transporte paralelo, geodésicas, curvatura geodésica.

4. Formas diferenciales

- 4.1. Campos vectoriales R^n : definiciones, curvas integrales.
- 4.2. Álgebra multilineal: formas multilineales, producto exterior, evaluación mediante el determinante, descomposición.
- 4.3. Formas diferenciales en R^n : definición, diferencial externo, pullback, forma de volumen en R^n .
- 4.4. Subvariedades acotadas: definiciones, campos vectoriales, formas diferenciales y orientación.
- 4.5. Integración y teorema de Stokes: Integración de formas diferenciales, teorema de Stokes.

Actividades formativas y Metodología

Título	Horas	ECTS	Resultados de aprendizaje
Tipo: Dirigidas			

Clases de problemas	30	1,2	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13
Clases de teoría	45	1,8	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13
Tipo: Supervisadas			
Clases de seminario	28	1,12	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13
Tipo: Autónomas			
Estudio personal	178	7,12	2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13

La asignatura dispone de tres horas de clase de teoría, dos de problemas, y dos de seminarios/prácticas a la semana durante 15 semanas del curso.

En las clases de teoría se introducirán los conceptos fundamentales y se explicarán los temas del programa alentando a los estudiantes a preguntar y participar activamente en clase.

En las clases de problemas se resolverán ejercicios y se analizarán cuestiones que aclaren y desarrollen las nociones introducidas en las clases de teoría. Este trabajo se llevará a cabo mediante las explicaciones hechas por el profesor en la pizarra y la participación activa de los estudiantes en la discusión de los diferentes argumentos empleados para solucionar los problemas, que el alumno deberá haber pensado previamente en horas de estudio , individualmente o en grupo.

Las sesiones de seminario están principalmente dedicadas a desarrollar algunos temas por parte del alumno, pero también a profundizar de forma autónoma en las cuestiones tratadas en clase de teoría. Durante la sesión, los alumnos darán respuesta a las cuestiones planteadas guiadas por los profesores que resolverán dudas puntuales y comentarán los aspectos más importantes del tema a desarrollar. Al finalizar cada sesión los profesores informarán a los alumnos si deben entregar un informe por escrito con la resolución de algunas de las cuestiones formuladas.

Aparte de esto está previsto la entrega por parte del alumnado de ejercicios personalizados a resolver online mediante la plataforma ACME.

Nota: se reservarán 15 minutos de una clase dentro del calendario establecido por el centro o por la titulación para que el alumnado rellene las encuestas de evaluación de la actuación del profesorado y de evaluación de la asignatura o módulo.

Evaluación

Actividades de evaluación continuada

Título	Peso	Horas	ECTS	Resultados de aprendizaje
Entrega de informes y problemas P	25%	10	0,4	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
Examen E1	30%	3	0,12	1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12
Examen E2	45%	3	0,12	1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12
Examen de recuperación ER	75%	3	0,12	2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12

La nota final (de evaluación continua) de la asignatura se calculará de la siguiente forma:

- Un 30% de la nota corresponderá a la realización de un examen parcial.
- Un 25% de la nota corresponderá a entregas de problemas y/o prácticas. En particular, la asistencia a los seminarios es obligatoria.
- Un 45% de la nota corresponderá a la realización de un examen final.

El alumno supera la asignatura si su nota final es superior o igual a 5.

El examen de recuperación reemplaza el parcial y el examen final. El alumno que apruebe la asignatura en la recuperación (con la nota de seminarios/ACME) recibirá la calificación final de 5, Aprobado, independientemente de su nota final.

Para poder asistir a la recuperación, el alumno ha tenido que haber sido evaluado previamente de actividades de evaluación continua que equivalgan a 2/3 de la nota final.

Tras el examen final se otorgarán las matrículas de honor. Estas matrículas de honor serán ya definitivas. Se considera que el alumno se presenta en la evaluación del curso si ha participado en actividades de evaluación que superen el 50% del total. En caso contrario, su calificación será de No Evaluable.

La evaluación única de la asignatura constará de las siguientes actividades de evaluación:

- Realización del examen final, por un 45% de la nota.
- Entrega el día del examen final de las entregas solicitadas en los seminarios, por un 25% de la nota final. En particular, la asistencia a los seminarios es obligatoria.
- Realización de un examen oral, por un 30% de la nota.

Bibliografía

Manfredo P. do Carmo. Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza Editorial (1990).

Theodore Shifrin. Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces. Accesible a la página de l'autor (2021).

Sebastián Montiel y Antonio Ros. Curvas y superficies. Proyecto Sur (1998).

Michael Spivak. Cálculo en Variedades. Ed. Reverté (1970).

Victor A. Toponogov. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Birkhäuser (2006).

Shoshichi Kobayashi. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Springer (2019).

Software

En algunos dels seminarios se utilizará el programa SageMath

Lista de idiomas

Nombre	Grupo	Idioma	Semestre	Turno
(PAUL) Prácticas de aula	1	Catalán	segundo cuatrimestre	manaña-mixto

(PAUL) Prácticas de aula	2	Catalán	segundo cuatrimestre	manaña-mixto
(PLAB) Prácticas de laboratorio	1	Catalán	segundo cuatrimestre	manaña-mixto
(PLAB) Prácticas de laboratorio	2	Catalán	segundo cuatrimestre	manaña-mixto
(SEM) Seminarios	1	Catalán	segundo cuatrimestre	manaña-mixto
(SEM) Seminarios	2	Catalán	segundo cuatrimestre	manaña-mixto
(TE) Teoría	1	Catalán	segundo cuatrimestre	manaña-mixto

PROVISIONAL