Publicacions Matemàtiques, Vol 33 (1989), 313–327.

EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION POUR UN SYSTEME DE DEUX E.D.P.

LAHCEN GHANNAM

Abstract

We give some results on the existence, uniqueness and regularity of a nonlinear evolution system. This system models the viscoelastic behaviour of unicellular marine alga *Acetabularia mediterrania* when the calcium concentration varies. We show (with the aid of a fixed-point theorem) that the system admits a unique local solution in time.

I. Introduction

A. Le problème étudié.

Dans cet article, nous nous intéressons à la résolution du système d'équations aux dérivées partielles suivant:

(1.1)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(\chi)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(p_2(\chi)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) - p_3(\chi).u - \frac{\partial}{\partial x}(p_4(\chi)) & (1.1.a) \\ \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + (K-\chi)p_5\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - (\beta + |\chi|)|\chi|^{n-1}\chi & (1.1.b) \end{cases}$$

dans $Q_T =]0,T[\times\Omega$ où $\Omega =]0,1[$ avec les conditions aux limites:

$$\begin{cases} u = 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0 \end{cases} \text{ sur } \Sigma_T =]0,T[\times \partial\Omega \text{ où}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial v} = -\frac{\partial \chi}{\partial x} \text{ en } x = 0 \text{ et } \frac{\partial \chi}{\partial v} = \frac{\partial \chi}{\partial x} \text{ en } x = 1$$

et les conditions initiales:

$$\begin{cases} u(0,x) = u^0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = u^1(x) \\ \chi(0,x) = \chi_0(x) \end{cases} \text{ pour } x \in \Omega$$

a, K, β et D désignent des constantes positives, n un entier naturel et les fonctions P_i, $1 \le i \le 5$, u^0, u^1 et χ_0 sont des fonctions données. Les inconnues sont u et χ.

On notera que le système (1.1) est de nature parabolique grâce à la présence du terme de viscosité $\frac{\partial}{\partial x}\left(p_2(\chi)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)$ dans l'équation (1.1.a).

B. L'origine du problème (1.1).

Le système (1.1) a été proposé par Goodwin et Trainor dans [5], pour modéliser l'évolution mécanique et chimique du cytoplasme de l'algue *accetabularia-méditerannea.* Expliquons leur démarche.

Ce modèle prend en compte les équations fondamentales de la dynamique, la loi de comportement du cytoplasme (on supposera que le cytoplasme est un matériau visco–élastique), et l'équation d'équilibre chimique entre, d'une part le calcium Ca^{2+} et une macromolécule C du cytoplasme et d'autre une autre macromolécule C^* du cytoplasme – voir page (4). L'équation (1.1.a) apparaîtra comme une équation de visco–élasticité en dimension 1, et l'équation (1.1.b) comme une équation donnant la variation de la concentration de calcium libre dans le cytoplasme en fonction du temps.

Introduisons au préalable les notations suivantes:

Soit, u le vecteur déplacement d'un élément du cytoplasme, ε le tenseur linéarisé de déformation et $\dot{\varepsilon}$ le tenseur des vitesses de déformation. σ désignera le tenseur des contraintes, ρ la densité de masse du cytoplasme, F la densité des forces externes et χ la concentration du calcium libre. On suppose pour l'instant que la configuration de référence Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^3$.

L'équation fondamentale de la dynamique déduite des principes mécaniques généraux s'écrit:

$$\rho(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \operatorname{div}\sigma(t,x) + F(t,x) \tag{1.2}$$

ou (t,x) est un élément de $]0,T[\times\Omega$.

La loi de comportement qui exprime les relations existant entre d'une part le tenseur des contraintes σ et d'autre part le tenseur des déformations ε et le tenseur des vitesses de déformations $\dot{\varepsilon}$, elle s'écrit:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \chi) \tag{1.3}$$

Nous nous placerons dans le cadre d'une théorie linéaire des petites perturbations. Alors l'équation (1.3) devient:

$$\sigma = \sigma_0(\chi) + A(\chi).\varepsilon + S(\chi).\dot{\varepsilon} \tag{1.4}$$

où σ_0 désigne le tenseur des contraintes à l'équilibre qui correspond à $\varepsilon = \dot{\varepsilon} = 0$, A et S sont des tenseurs. Nous ferons aussi un certain nombre d'hypothèses simplificatives: on suppose tout d'abord que le cytoplasme est un matériau isotrope. Par conséquent le tenseur A sera déterminé par les coefficients de Lamé λ et μ et S par les coefficients de viscosité η et δ. De plus on considère le cas ou les forces externes sont réduites aux forces de rappel exercées sur le cytoplasme.

En utilisant la loi de comportement (1.4), l'équation (1.2) devient:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{ div } A.\varepsilon + \text{ div } S.\dot{\varepsilon} + \text{ div } \sigma_0 - p_3 u \tag{1.5}$$

avec $-p_3, u = F$ où $p_3 = p_3(\chi)$ représente le module d'élasticité -pour illustration voir [5]-.

La deuxième équation du modèle est fondée sur l'hypothèse d'une réaction simple de stoïchiométrie n entre le calcium Ca^{2+} et une macromolécule C du cytoplasme à laquelle il se lie pour former une autre macromolécule C^* du cytoplasme, on a:

$$C + n\,Ca^{2+} \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C^*$$

k_1 et k_{-1} désignent respectivement les vitesses de réaction et de réaction inverse.

La variation dans le temps de la concentration χ vérifie la relation

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = k_{-1}(K - \chi) - k_1(\beta + |\chi|)|\chi|^{n-1}\chi + D\Delta\chi \tag{1.6}$$

où K est la concentration totale du calcium (lie + libre), $\beta =$ nc-K est une constante que l'on supposera positive et D représente le coefficient de diffusion du calcium dans le cytoplasme.

Dans [5] Goodwin & Trainor ont montré que toute modification du tenseur de déformation entraîne une modification de la concentration χ du calcium libre. En d'autres termes k_1 et k_{-1} sont des fonctions du tenseur des déformations. Nous suivons le modèle retenu dans [5] à savoir: k_1 est une constante et k_{-1} est une fonction positive de ϵ (tenseur des déformations).

On peut considérer que le système (1.1) est un système monodimensionnel issu du système tridimensionnel (1.5), (1.8). En effet, supposons en première approximation que les déformations d'une bande rectiligne du cytoplasme de section homogène, soient longitudinales (on néglige les effets latéraux). Après normalisation, le système d'équation (1.7), (1.8) devient

(1.9)
$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(p_2(\chi)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) - p_3(\chi)u + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_0(\chi)) & (1.9.a) \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + a(K - \chi)k_{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - (\beta + |\chi|)|\chi|^{n-1}\chi & (1.9.b) \end{cases}$$

dans $]0, T[\times\Omega$ où $\Omega =]0, 1[$ et a une constante positive.

En posant $(\lambda + 2\mu)(\chi) = p_1(\chi)$; $(\delta + \frac{4}{3}\eta)(\chi) = p_2(\chi)$,

$$-\sigma_0(\chi) = p_4(\chi) - \sigma_0(0),\ a\,k_{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = p_5\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \text{ et } \rho \equiv 1,$$

on retrouve le système (1.1).

II. Existence locale en temps et unicité de la solution de (1.1)

Nous faisons une fois pour toute les hypothèses suivantes:

* (H1) Pour $i = 1,2,3$ les fonctions p_i sont localement lipschitziennes.
* (H2) Il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que:

$$0 < c_1 \leq p_2(\cdot) \leq c_2.$$

* (H3) p_1 et p_3 sont des elements de $L^\infty(\mathbf{R})$.
* (H4) les fonctions p_4 et p_5 sont de classe C^1 et telles que leurs dérivées appartiennent à $L^\infty(\mathbf{R})$.

Remarque 2.1.

L'hypothèse (H4) implique qu'il existe une constante $b > 0$ telle que: $\forall s \in \mathbf{R}$, $|p_4(A)| \leq b|s|$

2.1. Modification du problème (1.1).

Soit $U = (u_1, u_2)$ où $u_1 = u$ et $u_2 = \frac{\partial u}{\partial t}$, alors le système (1.1) devient:

Trouver (U, χ) tel que:

(2.1)

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + A_0(\chi).U = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(\chi)\right) \text{ dans } Q_T \quad (2.1.a) \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} - D\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = (K-\chi)\,p_5\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - (\beta + |\chi|)|\chi|^{n-1}\chi \text{ dans } Q_T \quad (2.1.b) \\ \text{vérifiant : } U(0,x) = U_0(x) = (u^0(x), u^1(x));\ \chi(0,x) = \chi_0(x) \\ \text{dans } \Omega \text{ et } U(t,x) = (0,0),\ \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0 \text{ sur } \Sigma_T \end{cases}$$

où

$$A_0(\chi). = \begin{pmatrix} 0 & -I. \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(\chi)\frac{\partial .}{\partial x}\right) + p_3(\chi) & -\frac{\partial}{\partial x}\left(p_2(\chi)\frac{\partial .}{\partial x}\right) \end{pmatrix}$$

et $p(\chi) = (0, p_4(\chi))$.

Proposition 2.1.

Si $T < +\infty$, alors pour tout $\lambda \geq 0$ le problème (2.1) admet une et une seule solution si et seulement si le problème:

(2.2)

$$\begin{cases} \textit{trouver } (U,\chi) \textit{ solution du système suivant :} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + A_\lambda(\chi).U = -e^{-\lambda t}\frac{\partial}{\partial x}\left(p(\chi)\right) \quad (2.2.a) \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} - D\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = (K-\chi)p_5\left(e^{\lambda t}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - (\beta + |\chi|)|\chi|^{n-1}\chi \quad (2.2.b) \\ \textit{et vérifiant les mêmes conditions initiales et aux limites que dans (2.1)} \end{cases}$$

admet une et une seule solution.

$$\text{où } A_\lambda(\chi). = A_0(\chi). + \lambda I$$

Preuve:

If suffit de faire dans (2.1) le changement de fonction suivant:

$$U = e^{\lambda t} V$$

Dans tout ce qui suit on s'intéressera au système (2.2). ■

2.2. Théorème d'existence, d'unicité et de régularité.

En plus des hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) nous supposons que:

(H5) $U_0 \in (H_0^1(\Omega))^2$

(H6) $\chi_0 \in H^2(\Omega)$ et $\frac{\partial \chi}{\partial v} = 0$ sur $\partial\Omega = \{0, 1\}$.

On démontre dans ce paragraphe le théorème suivant:

Théorème 2.1.

Supposons que (H1) - (H6) soient vérifiées, alors il existe $T^* = T^*(u^0, u^1, \chi_0)$ *tel que (2.2) admet une et une seule solution* (U, χ) *vérifiant:*

i) $U \in L^2(0, T^*, H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T^*, H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$.

ii) $\chi \in L^\infty(0, T^*, H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T^*, L^2(\Omega))$

Notons tout d'abord que les équations (2.2.a) et (2.2.b) sont couplées par les fonctions $p_i(\chi) \wedge 1 \leq i \leq 4$ dans (2.2.a) et par la présence du terme $p_5\left(e^{\lambda t}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)$ dans (2.2.b).

Pour démontrer l'existence et l'unicité de solution au problème (2.2), on va considérer le système d'équations découplées (2.3) suivant:

χ étant un élément fixé de $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ avec $\dfrac{d\chi}{dt} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$.

Le système (2.3) consiste trouver $(U, \xi) \in L^2(0, T, (H_0^1(\Omega))^2 \times L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ vérifiant:

$$(2.3)\begin{cases} (2.3.a)\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + A_\lambda(\chi).U = -\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\lambda t}p(\chi)\right) \text{ dans } Q_T \quad (2.3.a_1) \\ U(0,x) = U_0(x) \text{ sur } \Omega \quad (2.3.a_2) \end{cases} \\ (2.3.b)\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} - D\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \xi = (K-\chi)p_5\left(e^{\lambda t}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \chi - (\beta + |\chi|)|\chi|^{n-1}\chi \\ \text{dans } Q_T \quad (2.3.b_1) \\ \xi(0,x) = \chi_0(x) \text{ sur } \Omega \quad (2.3.b_2) \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0 \text{ sur } \Sigma_T \quad (2.3.b_3) \end{cases} \end{cases}$$

La preuve du théorème (2.2) est découpée en trois parties:

1ère partie: on montre que l'équation (2.3.a) admet une et une seule solution (Proposition 2.2) dans $L^2(0, T, (H_0^1(\Omega))^2)$. On montre également que pour tout $U \in L^2(0, T, (H_0^1(\Omega))^2)$ l'équation (2.3.b) admet une solution unique (proposition 2.3) dans $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$. On en déduit que le système (2.3) admet une solution unique.

2ème partie: Les résultats de la première partie permettront de définir pour tout $T > 0$, une application G_T de $L^\infty(0,T,H^1(\Omega))$ dans lui même qui à toute fonction χ fait correspondre la fonction ξ où (U,ξ) est la solution de (2.3).

On obtient dans un premier temps une estimation à priori de U solution de (2.3.a) (Lemme 2.2). Puis, on obtient une estimation à priori de ξ, où (U,ξ) est la solution de (2.3) – (lemme 2.3).

Ces deux résultats nous permettent de montrer qu'il existe $T_0 > 0$ tel pour tout $0 < T \leq T_0$, G_T est une application d'un fermé V_T de $L^\infty(0,T,H^1(\Omega))$ dans lui même (proposition 2.4).

3ème partie: On montre qu'il existe $0 < T^* \leq T_0$ tel que G_{T^*} soit une contraction du fermé V_{T^*} dans lui même. On en déduit l'existence d'un point fixe χ, le couple (U,χ) correspondant n'est autre que la solution de (2.2). A l'aide d'un résultat de régularité de V. Barbu [**2**], on montre que la solution χ vérifie: $\chi \in L^\infty(0,T^*,H^2(\Omega))$.

i) étape 1.

Pour résoudre (2.3.a), nous introduisont les espaces suivants:

$$\mathcal{V} = (H_0^1(\Omega))^2 \text{ et } \mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

Nous munissons $\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$ des produits scalaires suivants: Soit $U = (u_1, u_2)$ et $V = (v_1, v_2)$:

$$< U, V >_{\mathcal{V}} = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) dx$$

et $\|.\|_{\mathcal{V}}$ la norme associée

$$[U,V]_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_1 v_1 + u_2 v_2 \right) dx.$$

et $|.|_{\mathcal{H}}$ la norme associée.

Il résulte de l'inégalité de Poincaré que $<,>_{\mathcal{V}}$ est un produit scalaire équivalent au produit scalaire naturel.

Notons $\mathcal{V}'$ le dual de $\mathcal{V}$ tel que:

$$\mathcal{V}' = \{(u_1, u_2) | u_1 \in H_0^1(\Omega) \text{ et } u_2 \in H^{-1}(\Omega)\}.$$

Des injections continues et denses suivantes: $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ nous pouvons déduire que les injections suivantes: $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}'$ sont denses et continues.

Lemme 2.1.

Supposons que les hypothèses (H.2)-(H.4) soient vérifiées alors il existe deux constantes M et C et $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ et tout U et V éléments de $\mathcal{V}$ on ait:

i) $< A_\lambda(\chi) U, V >_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \leq M \|U\|_{\mathcal{V}} . \|V\|_{\mathcal{V}}$

ii) $< A_\lambda(\chi) U, U >_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \geq C \|U\|^2_{\mathcal{V}}$

Preuve:

ii) Nous rappelons que $<,>_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}$ désigne le produit de dualité entre $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}$, il est loisible de le prendre comme produit scalaire dans $\mathcal{H}$.

$$< A_\lambda(\chi)U, U >_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \int_\Omega \left[(1 - p_1(\chi)).\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + (1 - p_3(\chi))u_1\, u_2\right] dx =$$
$$= \int_\Omega \left[\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \lambda u_1^2 + p_2(\chi)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \lambda u_2^2\right] dx$$

on pose $N = \sup\,(|1 - p_1(.)|_{L^\infty(\mathbf{R})}, |1 - p_3(.)|_{L^\infty(\mathbf{R})})$.

D'après les hypothèses (H2) et (H3) on a $N < +\infty$.

En utilisant l'inégalité de Hölder puis celle de Young on obtient

$$< A_\lambda(\chi)U, U >_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \geq \left(\lambda - \frac{N^2}{2r}\right)\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\lambda - \frac{N}{2}\right)|u_1|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$+ \left(c_1 - \frac{r}{2}\right)\left|\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\lambda - \frac{N}{2}\right)|u_2|^2_{L^2(\Omega)}$$

où $r \in \mathbf{R}_+^*$ est tel que $c_1 - \frac{r}{2} > 0$, soit alors $\lambda_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\lambda_0 - \frac{N^2}{2r} > 0$ et $\lambda_0 - \frac{N}{2} > 0$ donc $< A_\lambda(\chi)\,U, U >_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \geq c\|U\|^2_{\mathcal{V}}$ pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ où

$$c = \inf\left(\lambda - \frac{N^2}{2r}, c_1 - \frac{r}{2}, \lambda - \frac{N}{2}\right)$$

Proposition 2.2.

Si $\chi \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$, alors, $\forall T > 0$ l'equation (2.3.a) admet une solution unique vérifiant:

$$U \in \mathcal{W}(0, T, \mathcal{V}, \mathcal{V}') = \{V \in L^2(0, T, \mathcal{V}) / \frac{dV}{dt} \in L^2(0, T, \mathcal{V}')\}$$

Preuve:

De l'hypothèse (H1) et du fait que $\chi \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ nous déduisons que $\frac{\partial}{\partial x}(p(\chi)) \in L^2(0, T, \mathcal{H})$. L'existence et l'unicité de la solution $U \in \mathcal{W}(0, T, \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ découle du lemme 2.1 et du théorème 2 page 620 de R. Dautray – J.L. Lions [**4**].

Nous allons montrer maintenant que l'équation (2.3.b) admet une et une seule solution. ■

Proposition 2.3.

Etant donné $\chi \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ avec

$$\frac{d\chi}{dt} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), U \in \mathcal{W}(0, T, \mathcal{V}, \mathcal{V}')$$

fixés, alors pour tout $T > 0$ l'équation (2.3.b), admet une solution unique $\xi \in L^\infty(0,T,H^2(\Omega))$ et $\frac{d\xi}{dt} \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$

Preuve:

Comme $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ alors $H^1(\Omega)$ est une algèbre de Banach - voir R.A. Adams [1] - il en est de même pour $L^\infty(0,T,H^1(\Omega))$ et donc $(\beta+|\chi|)|\chi|^{n-1}\chi \in L^\infty(0,T,H^1(\Omega))$ et comme $U \in \mathcal{W}(0,T,\mathcal{V},\mathcal{V}')$ alors d'après l'hypothèse (H4) on a:

$$(K-\chi)p_5\left(e^{\lambda t}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \chi - (\beta+|\chi|)|\chi|^{n-1}\chi \in L^2(0,T,L^2(\Omega)).$$

et à l'aide des mêmes arguments que dessus on a:

$$\frac{d}{dt}\left[(K-\chi).p_5\left(e^{\lambda t}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \chi - (\beta+|\chi|)|\chi|^{n-1}\chi\right] \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$$

Si χ_0 vérifie l'hypothèse (H6) alors d'après la proposition 2.1 page 200 de V. Barbu [2], l'équation (2.3.b) admet une unique solution vérifiant:

$$\xi \in L^\infty(0,T,H^2(\Omega)) \subset L^\infty(0,T,H^1(\Omega)) \text{ et } \frac{d\xi}{dt} \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$$

ii) Etape 2.

On pose $\frac{R_0^2}{2} = D_1\|\chi_0\|^2_{H^1(\Omega)}$ où $D_1 = \sup\left(D, \frac{1}{D}\right)$.

Soit $V_T = \{\chi \in L^\infty(0,T,H^1(\Omega))/|\chi|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))} \le R_0 \text{ et } \chi(0) = \chi_0\}$, V_T est un fermé de $L^\infty(0,T,H^1(\Omega))$.

Proposition 2.4.

Les fonctions u^0, u^1 et χ_0 étant fixées, il existe $T_0 = T_0(u^0,u^1,\chi_0,\lambda)$ tel que pour tout $T \le T_0$, G_T soit une application de V_T dans lui même.

Pour montrer cette proposition, nous allons tout d'abord montrer les estimations suivantes.

Lemme 2.2.

Il existe des constantes positives λ_1, b_1 et b_2 telles que pour tout U solution de (2.3.a) on a: $\forall\lambda \ge \lambda_1$ et $\forall t > 0$:

$$|U(t)|^2_{\mathcal{H}} + b_1\int_0^t \|U(s)\|^2_{\mathcal{V}}ds \le b_2\int_0^t e^{-2\lambda s}|\chi(s)|^2_{L^2(\Omega)}ds + |U_0|^2_{\mathcal{H}}.$$

où

$$|U|^2_{\mathcal{H}} = \|u_1\|^2_{H^1(\Omega)} + |u_2|^2_{L^2(\Omega)} \text{ et } \|U\|^2_{\mathcal{V}} = \left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)}$$

Preuve:

On effectue le produit scalaire dans $\mathcal{H}$ de l'équation (2.3.a) par U. On obtient:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|U|^2_{\mathcal{H}}+\int_\Omega\left[\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\lambda u_1^2+p_2(\chi)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2+\lambda u_2^2\right]dx.$$
$$=\int_\Omega\left[(1-p_1(\chi))\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x}+(1-p_3(\chi))u_1u_2+e^{-\lambda t}p_4(\chi)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right]dx.$$

En intégrant par apport au temps et en utilisant l'inégalité de Hölder puis celle de Young, on a:

$$\frac{1}{2}|U(t)|^2_{\mathcal{H}}+\int_0^t\left[\left(\lambda-\frac{N^2}{2r}\right)\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\lambda-\frac{N}{2}\right)|u_1|^2_{L^2(\Omega)}+\right.$$
$$\left.(c_1-r)\left|\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\lambda-\frac{N}{2}\right)|u_2|^2_{L^2(\Omega)}\right]ds$$
$$\leq\int_0^t\frac{e^{-2\lambda s}}{2r}|p_4(\chi)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds+\frac{1}{2}|U_0|^2_{L^2(\Omega)}.$$

où $r\in\mathbb{R}_+^*$ et tel que: $c_1-r>0$.

Soit alors $\lambda_1\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda_1-\frac{N^2}{2r}>0$ et $\lambda_1-\frac{N}{2}>0$.

En utilisant la remarque 2.1, le lemme 2.2 en découle. ■

Lemme 2.3.

Pour tout $t>0$ et pour toute solution $(U.\xi)$ de (2.3). On a:

$$\|\xi(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\leq D_1\|\chi_0\|^2_{H^1(\Omega)}+\int_0^t h(|U(s)|_{\mathcal{H}},\|\chi(s)\|_{H^1(\Omega)})\,ds$$

où $h(.,.)$ est un polynôme de degré $2(n+1)$ en $\|\chi\|_{H^1(\Omega)}$ et 2 en $|U|_{\mathcal{H}}$.

Preuve:

Dans tout ce qui suit c désignera une constante positive indépendante de U et de χ.

On multiplie l'équation (2.3.b) par $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ et on intègre sur Ω:

$$\left|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{D}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\xi|^2_{L^2(\Omega)}=$$
$$=\int_\Omega\left[(K-\chi)p_5\left(e^{\lambda t}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+\chi-(\beta+|\chi|)|\chi|^{n-1}\chi\right]\frac{\partial\xi}{\partial t}\,dx.$$

d'après les inégalités de Hölder et de Young on a:

$$\int_\Omega K\,p_5\left(e^{\lambda t}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}\leq\frac{c}{r}\left[1+e^{2\lambda t}\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)}\right]+r\left|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)}$$

Du fait que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ et a l'aide des mêmes arguments i.e. les inégalités de Hölder et de Young:

$$\int_\Omega \chi\, p_5 \left(e^{\lambda t}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right).\frac{\partial \xi}{\partial t}\, dx \le \frac{c}{r}\, e^{2\lambda t}\|\chi\|_{H^1(\Omega)} \left[\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)} + 1\right] + r\left|\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)}.$$

et comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Omega) \quad \forall m \ge 1$ alors:

$$\int_\Omega (\beta + |\chi|)|\chi|^{n-1}\chi.\frac{\partial \xi}{\partial t}\, dx. \le \frac{c}{r}(\|\chi\|^{2n}_{H^1(\Omega)} + \|\chi\|^{2(n+1)}_{H^1(\Omega)}) + r\left|\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)}$$

On choisit r assez petit de telle sorte que $c = 1 - \frac{7r}{2} > 0$. En intégrant par rapport au temps on a:

$$\begin{aligned} &c\int_0^t \left|\frac{\partial \xi}{\partial t}(s)\right|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{D}{2}\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|\xi(t)|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le \frac{c}{r}\int_0^t \Big[(1 + e^{2\lambda s}|U(s)|^2_{\mathcal{H}}).(1 + \|\chi(s)\|^2_{H^1(\Omega)}) \\ &+(1 + \|\chi(s)\|^2_{H^1(\Omega)})\|\chi(s)\|^{2n}_{H^1(\Omega)}\Big]\, ds \\ &+ \frac{D}{2}\left|\frac{\partial \chi_0}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|\chi_0|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Soit alors:

$$h(X,Y) = \frac{c}{r}\cdot\frac{1}{\inf(1,D)}[(1 + e^{2\lambda s}X^2)(1+Y^2) + (1+Y^2)Y^{2n}]$$

Preuve de la proposition 2.4:
A partir du lemme 2.3 on a:

$$\|G_T(\chi(t))\|^2_{H^1(\Omega)} \le \frac{R_0^2}{2} + \int_0^T h(|U(s)|_{\mathcal{H}}, \|\chi(s)\|_{H^1(\Omega)})\, ds;$$

Si $\chi \in V_T$ alors on déduit du lemme 2. que

$$\int_0^T h(|U(s)|_{\mathcal{H}}, \|\chi(s)\|_{H^1(\Omega)})\, ds \le T\, f(Ro),$$

où $f(.)$ est un polynôme de degré: $\sup(4, 2(n+1))$. Et pour que, $G_T(V_T) \subset V_T$ il suffit de choisir T_0 tel que: $T_0 f(Ro) \le \frac{Ro^2}{2}$. Il est simple de vérifier que pour tout $T \le T_0$ on a: $G_T(V_T) \subset V_T$.

iii) Etape 3.

Nous montrons au préalable quelques lemmes:

Soient χ_1 et χ_2 deux éléments de V_T avec $T \leq T_0$ et soient $\xi_1 = G_T(\chi_1)$ et $\xi_2 = G_T(\chi_2)$.$U = (u_1, u_2)$ et $V = (v_1, v_2)$ les solutions de (2.3.a) respectivement à χ_1, χ_2 on a:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_\lambda(\chi_1)U = -e^{-\lambda t}\frac{\partial}{\partial x}[p(\chi_1)] \text{ dans } Q_T \quad (2.4.a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A_\lambda(\chi_2)V = -e^{-\lambda t}\frac{\partial}{\partial x}[p(\chi_2)] \text{ dans } Q_T \quad (2.5.a)$$

et

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} - D\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + \xi_1 = (K - \chi_1)\, p_5\left(e^{\lambda t}.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \chi_1 - (\beta + |\chi_1|)|\chi^{n-1}\chi_1$$

dans Q_T (2.4.b)

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} - D\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} + \xi_2 = (K - \chi_2)\, p_5\left(e^{\lambda t}\frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + \chi_2 - (\beta + |\chi_2|)|\chi_2|^{n-1}\chi_2$$

dans Q_T (2.5.b)

Lemme 2.4.

Il existe $\lambda_2 \geq \lambda_1$ et deux constantes b_1 et b_2 positives tels que pour tout $t \in [0, T]$ et U et V solutions de (2.4.a) et (2.5.a) on ait:

$$|U(t) - V(t)|^2_{\mathcal{H}} + b_1 \int_0^t |U(s) - V(s)|^2_{\mathcal{V}} ds \leq b_2\, T|\chi_1 - \chi_2|^2_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))}.$$

Preuve:

On fait la différence entre les équations (2.4.a) et (2.5.a) et puis on fait le produit scalaire $[\,,\,]$ dans $\mathcal{H}$ par $U - V$: On pose $U - V = W = (w_1, w_2)$.

A l'aide de l'inégalité de Hölder on a:

(2.6)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|W|^2_{\mathcal{H}}) + \int_\Omega \lambda\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \lambda w_1^2 + p_2(\chi_1)\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 + \lambda w_2^2$$

$$\leq |p_1(\chi_1) - 1|_{L^\infty(\Omega)}.\left|\frac{\partial w_1}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}.\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ |p_3(\chi_1) - 1|_{L^\infty(\Omega)}|w_1|_{L^2(\Omega)}.|w_2|_{L^2(\Omega)}$$

$$+ |p_1(\chi_1) - p_1(\chi_2)|_{L^\infty(\Omega)}.\left|\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{L^\infty(\Omega)}.\left|\frac{\partial w_1}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}$$

$$+ |p_3(\chi_1) - p_3(\chi_2)|_{L^\infty(\Omega)}|v_1|_{L^2(\Omega)}.|w_1|_{L^2(\Omega)}$$

$$+ e^{-\lambda t}|p_4(\chi_1) - p_4(\chi_2)|_{L^2(\Omega)}.\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}$$

$$+|p_2(\chi_1)-p_2(\chi_2)|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\left|\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}\cdot\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}$$

d'après l'inégalité de Young et l'hypothèse (H2)

$$|p_1(\chi_1)-1|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\left|\frac{\partial w_1}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}\cdot\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}\leq$$
$$\leq\frac{N^2}{2r}\left|\frac{\partial w_1}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{r}{2}\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$|p_3(\chi_1)-1|_{L^\infty(\Omega)}|w_1|_{L^2(\Omega)}\cdot|w_2|_{L^2(\Omega)}\leq\frac{N}{2}|w_1|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{N}{2}|w_2|^2_{L^2(\Omega)}$$

où N est défini antérieurement; d'après les hypothèses (H1), (H4) et le théorème des accroissements finis on a:

$$|p_i(\chi_1)-p_i(\chi_2)|_{L^2(\Omega)}\leq c\|\chi_1-\chi_2\|^2_{H^1(\Omega)}\text{ pour } i=1,\ldots,5\tag{2.7}$$

D'après le lemme (2.2) et du fait que χ_1 et χ_2 sont deux éléments de V_T on a:

$$\|v_1(t)\|_{H^1_0(\Omega)}\leq c\text{ et }\int_0^t\|v_2(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}ds\leq c\tag{2.8}$$

pour tout $t\in[0,T]$ où $c=c(R_0,T,u^0,u^1)$ est une constante.

De (2.7), (2.8) et de l'inégalité de Young on déduit:

$$|p_1(\chi_1)-p_1(\chi_2)|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}\cdot\left|\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq\frac{c}{2}\|\chi_1-\chi_2\|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{r}{2}\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$|p_3(\chi_1)-p_3(\chi_2)|_{L^\infty(\Omega)}|v_1|_{L^2(\Omega)}\cdot|w_2|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq c\|\chi_1-\chi_2\|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{1}{2}|w_2|^2_{L^2(\Omega)}.$$
$$|p_4(\chi_1)-p_4(\chi_2)|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}\leq\frac{c}{r}\|\chi_1-\chi_2\|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{r}{2}\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)}$$

de même:

$$\int_0^t\left[|p_2(\chi_1)-p_2(\chi_2)|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\left|\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}\cdot\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)}\right]ds$$
$$\leq\frac{c}{r}|\chi_1-\chi_2|^2_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))}+\frac{r}{2}\int_0^t\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)}ds$$

Par intégration entre 0 et t de l' énéquation (2.6) il résulte:

$$\frac{1}{2}|W(t)|^2_{\mathcal{H}} + \int_0^t \left[\left(\lambda - \frac{N^2}{2r}\right)\left|\frac{\partial w_1}{\partial x}\right|_{L^2(\Omega)} + \left(\lambda - \frac{N}{2}\right)|w_1|^2_{L^2(\Omega)}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{c}{r} - 2r\right)\left|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\lambda - \frac{N+1}{2}\right)|w_2|^2_{L^2(\Omega)}\right] ds$$
$$\leq c(R_0, T, u^0, u^1, r) \times |\chi_1 - \chi_2|^2_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))}$$

où $c(R_0, T, u^0, u^1, r)$ est une constante positive.

Soit $r > 0$ tel que $c - 2r^2 > 0$ et $\lambda_2 \geq \lambda_1$ tel que $\lambda_2 > \frac{N^2}{2r}$ et $\lambda_2 > \frac{N+1}{2}$.

Il suffit de prendre

$$b_1 = \inf\left(\lambda_2 - \frac{N^2}{2r}, \lambda_2 - \frac{N+1}{2}, \frac{c}{r} - 2r\right) \text{ et } b_2 = c(R_0, T, u^0, u^1, \lambda_2).$$

■

En faisant la différence entre les (2.4.b) et (2.5.b) on obtient.

(2.9)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi_1 - \xi_2) - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\xi_1 - \xi_2) + (\xi_1 - \xi_2) =$$
$$= (\chi_1 - \chi_2) + K\left(p_5(e^{\lambda t}\frac{\partial u_1}{\partial x}) - p_5(e^{\lambda t}\frac{\partial v_1}{\partial x})\right) -$$
$$\chi_1\left(p_5(e^{\lambda t}\frac{\partial u_1}{\partial x}) - p_5(e^{\lambda t}\frac{\partial v_1}{\partial x})\right)$$
$$- (\chi_1 - \chi_2)p_5(e^{\lambda t}\frac{\partial v_1}{\partial x}) - \beta\left(|\chi_1|^{n-1}\chi_1 - |\chi_2|^{n-1}\chi_2\right) - \left(|\chi_1|^n\chi_1 - |\chi_2|^n\chi_2\right).$$

Lemme 2.5.

Pour tout χ_1, χ_2 éléments de V_T et pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a:

$$\Big||\chi_1(t)|^m\chi_1(t) - |\chi_2(t)|^m\chi_2(t)\Big|_{L^1(\Omega)} \leq (m+1)R_0^m\|\chi_1(t) - \chi_2(t)\|_{H^1(\Omega)}$$

Preuve:

D'après le théorème des accroissements finis:

$$\Big||\chi_1|^m\chi_1 - |\chi_2|^m\chi_2\Big| = (m+1)|\alpha\chi_1 + (1-\alpha)\chi_2|^m|\chi_1 - \chi_2| \text{ où} \alpha \in]0,1[.$$

Après intégration sur Ω, utilisation de l'inégalité de Hölder, le résultat en découle. ■

Proposition 2.5.

Il existe $T^* \leq T_0$ tel que G_{T^*} soit une contraction de V_{T^*} dans lui même.

Preuve:

On multiplie l'équation (2.9) par $\frac{\partial}{\partial t}(\xi_1 - \xi_2)$ et puis on intègre sur Ω. A l'aide des mêmes arguments i.e. les inégalités de Hölder et Young, l'injection continue de $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)\,(\Omega =]0,1[)$, du théorème des accroissements finis et en utilisant les lemmes (2.4), (2.5), l'inégalité (2.8) et l'hypothèse (H4) on obtient: pour tout $t \in]0,T[$ on a

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq Tc(R_0, T, \lambda)|\chi_1 - \chi_2|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega))}.$$

Il suffit de choisir, alors $T^*(\leq T_0)$ de telle sorte que $T^*c(R_0, T^*, \lambda) < 1$. D'après la proposition (2.1), T^* est indépendant de λ. Soit χ le point fixe de G_{T^*}, alors (U, χ) où U est la solution de (2.3.a) n'est autre que la solution du système (1.1).

Comme

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{W}(0, T^*, \mathcal{V}, \mathcal{V}') = \{U \in L^2(0, T^*, H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)),\\ \frac{dU}{dt} \in L^2(0, T^*, H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))\} \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0, T^*], \mathcal{H}) \end{aligned}$$

et $\chi \in L^\infty(0, T^*, H^1(\Omega))$, $\frac{d\chi}{dt} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ alors d'après l'hypothèse (H4) $(K - \chi)p_5(e^{\lambda t}\frac{\partial u_1}{\partial x}) - (\beta + |\chi|)|\chi|^{n-1}\chi \in W^{1,2}(0, T^*, L^2(\Omega))$. Et donc d'après la proposition (2.1) p: 200 de Barbu [2], $\chi \in L^\infty(0, T^*, H^2(\Omega))$.

2.3. Positivité de la solution χ

Dans ce paragraphe, on montre le résultat suivant:

Proposition 2.6.

Supposons que $0 \leq \chi_0 \leq K$ sur $\Omega =]0,1[$ alors pour presque tout $t \in [0, T^*]$ et $x \in [0,1]$ $0 \leq \chi(t,x) \leq K$.

Preuve:

Nous rappelons tout d'abord que K désigne la concentration totale du calcium (libre + lié) dans le cytoplasme et χ la concentration du calcium libre dans le cytoplasme.

Puisque $\chi \in L^2(0, T^*, H^1(\Omega))$, $\chi^- = \sup(-\chi, 0) \in L^2(0, T^*, H^1(\Omega))$–voir [4] tome 1 chapitre IV page 934. En multipliant l'équation (1.1.b) par $-\chi^-$ et en intégrant sur Ω on obtient:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\chi^-|^2_{L^2(\Omega)} + D\left|\frac{\partial \chi^-}{\partial x}\right|^2_{L^2(\Omega)} + \beta|\chi^-|^{n+1}_{L^{n+1}(\Omega)} + |\chi^-|^{n+2}_{L^{n+2}(\Omega)} \\ (2.10) \qquad &= -\int_\Omega (K\chi^- + (\chi^-)^2)p_5\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx \leq 0 \end{aligned}$$

car $p_5(.) \geq 0$ et $K \geq 0$.

En intégrant (2.10) sur $[0, T^*]$, on déduit du fait que $\chi_0 \geq 0$ sur Ω que $|\chi^-|_{L^2(0,T^*,L^2(\Omega))} = 0$ et donc $\chi(t,x) \geq 0$ pour presque tout $(t,x) \in [0,T^*] \times [0,1]$.

Pour montrer que $K \geq \chi(t,x)$ pour presque tout $(t,x) \in [0,T^*] \times [0,1]$, on multiplie (1.1.b) par $-(K-\chi)^-$ puis on intègre sur $[0,T^*] \times [0,1]$. En utilisant le fait que $\chi(t,x) \geq 0$ pour presque tout $(t,x) \in [0,T^*] \times [0,1]$, et $\chi_0 \leq K$ sur Ω, on déduit de la même manière que $K \geq \chi(t,x)$ presque partout sur $[0,T^*] \times [0,1]$.

References

1. R.A. ADAMS, Sobolev spaces, *Academic Press* (1975).
2. V. BARBU, Non linear semigroups and differential equation in Banach spaces, *Editur a Academiei* (1976).
3. H. BREZIS, Analyse fonctionelle. Theorie et applications, *Masson* (1983), Paris, New–York, Barcelone.
4. R. DAUTRAY, J.L. LIONS, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, *CEA, Masson* **3** (1985).
5. B.C. GOODWIN, L.E.H. TRAINOR, Tip and whorl morphogenesis in acetabularia by Calcium–Regulaterd Strain fields, *J. theor. Biol.* **117** (1985), 79–106.
6. O. LADYZENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. OURALTSEVA, Equations paraboliques linéaires et quasiléaires, (1967), Moscou.
7. J.L. LIONS, "*Equations différentielles opérationelles et problèmes aux limites*," Grundlehren B., Springer, Berlin, 1961.
8. J.L. LIONS, E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes et application, 1 (1968), Dunod, Paris.

Keywords. Semilinear heat equation; Cauchy-Dirichlet problem; Fixed point theorem; Comparison principle.

Laboratoire d'Analyse Numérique
Université Paul Sabatier
U.F.R. M.I.G
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse
FRANCE

Rebut el 26 de Gener de 1989