Publicacions Matemàtiques, Vol 36 (1992), 65–72.

LES NOYAUX DE BERGMAN ET SZEGÖ POUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES QUI GÉNÉRALISENT LA BOULE

J.J. Loeb

Abstract

Let be G a complex semi-simple group with a compact maximal group K and an irreducible holomorphic representation ρ on a finite dimensional space V. There exists on V a K-invariant Hermitian scalar product. Let be Ω the intersection of the unit ball ov V with the G-orbit of a dominant vector. Ω is a generalization of the unit ball (case obtained for $G = SL(n, \mathbf{C})$ and ρ the natural representation on $\mathbf{C}^n$).

We prove that for such manifolds, the Bergman and Szegö kernels as for the ball are rational fractions of the scalar products and this fractions can be computed explicitely, using invariants of ρ. To compute this kernels, one uses a good orthonormal basis related to ρ, and then proves that one has a rational fraction, using Schur's orthogonality relations and Weyl's dimensional formula for V.

Introduction.

Pour la boule unité de $\mathbf{C}^n$, les noyaux de Szegö et de Bergman sont respectivement donnés (à une constante multiplicative près) par $(1- < x, y >)^{-n}$ et $(1- < x, y >)^{-n-1}$ (où $<\ ,\ >$ dénote le produit scalaire hermitien usuel dans $\mathbf{C}^n$). Nous donnons ici la généralisation suivante: Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe opérant irreductiblement sur un espace complexe de dimension finie V. On munit V d'un produit scalaire hermitien invariant par un sous-groupe compact maximal de G et on considère la varieté Ω obtenue comme intersection de la boule unité et de l'orbite d'un vecteur dominant. Le résultat que nous allons démontrer est le suivant:

Pour une telle varieté, les noyaux de Bergman et de Szegö s'expriment comme des fractions rationnelles du produit scalaire. Quand G est simple, le bord de Ω est strictement pseudo–convexe et on a ainsi une généralistion naturelle du cas de la boule.

Notations et rappels.

On note $\mathcal{O}(X)$ l'espace des fonctions holomorphes sur une varieté complexe X.

Pour un groupe compact K, on se donne une famille de représentations irreductibles unitaires δ sur E_δ, inéquivalentes entre elles et décrivant (à equivalence près) toutes les représentations. On note V_δ l'espace engendré par les fonctions $< \delta(k)x|y >$ $(k \in K;\ x, y \in E_\delta$ et $< \ | \ >$ dénote un produit scalaire hermitien sur $E_\delta)$. D'aprés le théorème de Peter-Weyl, on a: $L^2(K) = \bigoplus_\delta V_\delta$ (décomposition hilbertienne). Lorsque G est un groupe réductif complexe et K un sous–groupe compact maximal, la décomposition précédente se complexifie et on a: $\mathcal{O}(G) = \bigoplus_\delta W_\delta$ où W_δ est l'espace engendré par les fonctions holomorphes $< \delta(g)x|y >$ $(g \in G)$. Cette fois–ci les convergences sont uniformes sur les compacts de G. W_δ est l'espace de la représentation antiholomorphe adjointe de δ. Soit H un sous–groupe complexe fermé de G. Notons par $(W_\delta)_H$ l'espace des éléments de W_δ qui sont H–invariants à droite. (Ils s'identifient à certains éléments de $\mathcal{O}(G/H)$). On a la décomposition:

$$\mathcal{O}(G/H) = \bigoplus_\delta (W_\delta)_H$$

Ces résultats ont été demontrés par Harish-Chandra dans un cas plus général. Les enoncés qui précédent figurent par exemple dans [**B-O**].

Les résultats qui précédent s'adaptent immédiatement au cas d'un ouvert Ω dans G/H et qui est K-invariant. On a alors: (1) $\mathcal{O}(\Omega) = \bigoplus_\delta (W_\delta)_H$. (Les convergences sont prises ici uniformément sur les compacts de Ω).

Soit m_δ la dimension de l'espace des vecteurs H–invariants dans E_δ. Alors $(W_\delta)_H$ est en tant que G–module une somme directe de m_δ copies de E_δ munies de la structure de module adjoint de (E_δ, δ). En effet, soit $Y_1, \dots, Y_n$ une base de E_δ, un élément de V_δ s'écrit de façon unique sous la forme: [**Wal**]

$$\sum_i < \delta(g)X_i|Y_i >$$

L'invariance par H donne: $\delta(h)X_i = X_i \quad \forall h \in H$, d'où le résultat.

Dans la suite, nous nous plaçons dans la situation: G semi–simple complexe avec un système de racines positives fixé. On se donne également un poids dominant Λ auquel est associé une représentation (π_Λ, E_Λ) muni d'un produit scalaire Hermitien K–invariant noté $(\ |\ )$. Soit v_Λ un vecteur dominant de norme 1. On note P_Λ le stabilisateur de v_Λ qui est contenu dans un groupe parabolique P. On considère la décomposition (1) dans le cas $H = P_\Lambda$. Si $m_\delta \neq 0$, alors le poids dominant d'un $(W_\delta)_H$ est nécessairement de la forme $n.\Lambda$ $(n \geq 0)$. Dans ce cas $m_\delta = 1$. E_δ est le sous G-module de $E_\Lambda^{\otimes n}$ engendré par $v_\Lambda^{\otimes n}$. On notera pour la suite $E_\delta = E_n$ et π_n la représentation associée et $(W_\delta)_H = W_n$. On a:

$$\mathcal{O}(\Omega) = \bigoplus_{n \geq 0} W_n$$

On choisit par la suite pour Ω l'image dans G/P_Λ des $g \in G$ vérifiant: $< gv_\Lambda | gv_\Lambda > < 1$.

Remarque: La variété G/P_Λ s'identifie à la G–orbite X de v_Λ. Son adhérence dans E_Λ, qui est aussi son enveloppe d'holomorphie, est un cône. Le groupe $\mathbf{C}^*$ opère par homothétie sur l'orbite. L'ouvert Ω est alors obtenu comme intersection de la boule unité de E_Λ avec l'orbite, et la décomposition précédente de $\mathcal{O}(\Omega)$ peut se lire comme une décomposition en série de Laurent de: $t \to f(t.x)$ $(x \in X)$ où les termes négatifs n'interviennent pas car f se prolonge à $\overline{X}$. Dans le cas de la boule de $\mathbf{C}^n$, on choisit la représentation naturelle de $SL(n, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^n$ et les W_n sont les espaces de polynômes homogènes de degré n.]

Les noyaux de Bergman et de Szegö.

Le noyau de Bergman a été défini pour les variétés dans [**We**]. En principe, c'est une forme différentielle de type (m, m) où m est la dimension complexe de la varieté M. S'il existe sur M une m–forme holomorphe w ne s'annulant pas, alors on peut identifier le noyau de Bergman avec une fonction $B(x, y) \in C^\infty(X \times X)$ qui est holomorphe en x et antiholomorphe en y et telle que: $\forall f \in L^2(X, w \wedge \overline{w}) \cap \mathcal{O}(X)$

$$f(x) = \int_X f(y)\, B(x, y) w_y \wedge \overline{w}_y \qquad (x \in X)$$

Ce noyau est alors obtenu par la formule:

$$B(x, y) = \sum_n \Phi_n(x)\overline{\Phi_n(y)}$$

où les Φ_n constituent une base orthonormée quelconque de $L^2(X, w \wedge \overline{w})$.

Le noyau de Szegö est défini par exemple dans [**Kra**, (p. 55–57)] pour des domaines bornés de $\mathbf{C}^n$ à bord régulier. Dans notre cas, si on appelle

dk la mesure de Haar normalisée sur K, c'est un noyau $S(x, y)$ continu dans $\Omega \times \overline{\Omega}$, holomorphe en x, antiholomorphe en y et tel que:

$$\forall f \in C(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{O}(\Omega) : f(x) = \int_K f(k \cdot x_0)\, S(x, kx_0) dk$$

pour $x \in \Omega$. (x_0 élément quelconque de $\partial\Omega$)

Comme pour le noyau de Bergman, on a: [**Kra**]

$$S(x, y) = \sum \Phi_n(x)\overline{\Phi_n(y)} \qquad x, y \in \Omega$$

où les Φ_n forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert qui est le complété de l'espace des fonctions de $C(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{O}(\Omega)$ muni du produit scalaire:

$$< f, g > = \int_K f(kx_0)\, \overline{g(kx_0)} dk$$

On va calculer les noyaux de Bergman et Szegö en choisissant des bases Φ_n convenables. Précisons d'abord la forme w que nous choisissons pour Ω (qui est la restriction d'une forme definie sur tout G/P_Λ).

Lemme. *Il existe sur G/P_Λ une forme volume holomorphe w, G-invariante et ne s'annulant pas. Cette forme est déterminée à une constante multiplicative près.*

Preuve: Comme G est semi-simple, il n'existe pas de caractère non trivial. Par conséquent $\det \pi_\Lambda(g) = 1$, $\forall g \in G$. Donc sur la G-orbite de v_Λ (qui s'identifie à G/P_Λ) il existe une forme holomorphe G-invariante et ne s'annulant pas, obtenue par translation d'une forme en v_Λ choisie non nulle. L'unicité est triviale. ∎

Enonçons à présent le théorème.

Théorème. *Les noyaux de Bergman et Szegö sur Ω sont des fractions rationnelles en $(\pi_\Lambda(g_1)v_\Lambda | \pi_\Lambda(g_2)v_\Lambda)$. On peut explicitement calculer ces fractions à partir des invariants de G et de la représentation π_Λ.*

Preuve du théorème:

On met des points sur les objets quotients.

On utilise les trois outils suivants.

(1) Une formule intégrale [**Wal**], (p. 177)].

Soit G un groupe semi–simple avec une décomposition d'Iwasawa : $G = KAN$. On note ρ la demi-somme des racines associée à la décomposition réele dans $Lie(G)$ (ou la somme des racines associée à la décomposition *complexe* dans $Lie(G)$. On a la formule:

$$\forall f \in C_c^\infty(G) : \int_G f(g)dg = \int_{K\times A\times N} f(kan)e^{2\rho(Log a)}dkdadn$$

(dg, dk, da, dn sont des mesures de Haar respectivement sur G, K, A, N).

On peut utiliser cette formule pour calculer une mesure dg qui est G-invariante sur G/P_Λ. L'algèbre de Lie $\underline{a}$ de A se décompose en somme orthogonale par rapport à la forme de Cartan Killing: $a_\Lambda \oplus a_\Lambda^\perp$, où a_Λ est l'annulateur de Λ. On a $\dim a_\Lambda^\perp = 1$ et il existe donc H_0 unique dans $a_\Lambda^\perp$ tel que: $\Lambda(H_0) = 1$. On pose: $2\rho(H_0) = \alpha$. En utilisant [**War**], on a:

$$\forall f \in C_c^\infty(G/P_\Lambda) : \int_{G/P_\Lambda} f(\dot g)d\dot g = \int_{K\times\mathbf{R}} f(ke^{tH_0})e^{\alpha t}dk\,dt$$

(Dans cette dernière intégrale, on identifie une fonction sur G/P_Λ avec une fonction sur $K \times \exp(a_\Lambda^\perp)$.)

Pour finir on notera que $d\dot g = w \wedge \overline{w}$ (à une constante multiplicative près).

(2) Les formules d'orthogonalité [**Wal**, (p. 29 et 30)].

Si δ et δ' sont deux représentations irréductibles unitaires de K, on a, en notant $< \ | \ >$ les produits scalaires associés,

$$\int < \delta(k)X|Y > < \overline{\delta'(k)X'|Y'} > \ dk$$
$$= \begin{cases} 0 \ \text{ si } \delta \text{ et } \delta' \text{ sont inéquivalentes.} \\ \dfrac{1}{d_\delta} < X|Y > < \overline{X'|Y'} > \quad \text{si } \delta = \delta' \end{cases}$$

(où d_δ est la dimension de la représentation δ).

(3) La formule de dimension de H. Weyl [**Wal**, p. 106].

Pour une représentation μ de poids dominant λ de G, la dimension d_μ de la représentation est donnée par la formule:

$$d_\mu = \frac{\prod_{\alpha>0}(\lambda+\rho,\alpha)}{\prod_{\alpha>0}(\rho,\alpha)}$$

En particulier pour $\lambda = n.\Lambda$, on a:

$$d_\mu = \frac{\prod_{\alpha>0}(n\Lambda+\rho,\alpha)}{\prod_{\alpha>0}(\rho,\alpha)} = T_\Lambda(n)$$

Le point important ici est que $T_\Lambda(n)$ est un *polynôme en n*.

Passons à la démonstration du théorème pour le noyau de Bergman que nous noterons B.

On remarquera tout d'abord que les W_n associés à des représentations inéquivalentes pour $n \neq m$ sont orthogonaux. Comme $w \wedge \overline{w} = dg = e^{\alpha t} dk\, dt$ les espaces sont aussi orthogonaux pour dg. Pour calculer le noyau de Bergman, il suffit donc de construire des bases orthogonales pour chaque W_n.

On complète le vecteur $v_1 = v_\Lambda$ en une base orthogonale $v_1 \dots v_n$ pour $E_\Lambda = E_1$. Sur $E_\Lambda^{\otimes n}$ on choisit un produit scalaire proportionnel à celui provenant du produit tensoriel et normalisé par le fait que $v_\Lambda^{\otimes n}$ soit unitaire. On choisit sur le sous module E_n ,muni du produit scalaire induit une base orthonormée $v_{1,n} = v_\Lambda^{\otimes n}$, $v_{2,n} \cdots$, $v_{r,n}$.

D'après les relations d'orthogonalité précédentes, les fonctions

$$(\pi_n(g)v_{1,n}|v_{1,n}), \dots , (\pi_n(g)v_{1,n}|v_{\dot{n},n})$$

forment une base orthogonale de W_n. Il faut normer la base. On a:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left|(\pi_n(\dot{g})v_{1,n} \mid v_{i,n})\right|^2 d\dot{g} \\
&= \int_{t<0} \left|(\pi_n(ke^{tH_0})v_{1,n} \mid v_{i,n})\right|^2 e^{\alpha t} dk\, dt \\
&= \int_{t<0} e^{2nt+\alpha t}\left|(\pi_n(k)v_{1,n} \mid v_{i,n})\right|^2 dk\, dt \\
&\text{(on utilise les normalisations de (1))} \\
&= \frac{1}{2n+\alpha} \int \left|(\pi_n(k)v_{1,n} \mid v_{i,n})\right|^2 dk \\
&= \frac{1}{(2n+\alpha)T_\Lambda(n)} \qquad \text{(en utilisant les relation d'orthogonalité)}
\end{aligned}$$

Par conséquent $\sqrt{(2n+\alpha)T_\Lambda(n)}(\pi_n(g)v_{1,n} \mid v_{i,n})$ est une base orthonormée.

Donc on a:

$$B(\dot{g}_1, \dot{g}_2) = \sum_n \sum_i (2n+\alpha)T_\Lambda(n)(\pi_n(g_1)v_{1,n} \mid v_{i,n}) \cdot \overline{(\pi_n(g_2)v_{1,n} \mid v_{i,n})}$$

où $\dot{g}_1, \dot{g}_2 \in \Omega$.

Remarquons à présent que la K-invariance de w implique l'invariance par K (sous-groupe d'automorphisms de Ω) de B.

On écrit $g_1 = k_1 e^{t_1 H_0}$ $g_2 = k_2 e^{t_2 H_0}$ où $k_1, k_2 \in K$, $t_1, t_2 < 0$ On a: $B(k_1 e^{t_1 H_0}, k_2 e^{t_2 H_0}) = B(k_2^{-1} k_1 e^{t_1 H_0}, e^{t_2 H_0})$

On a pour $i \neq 1$.

$$\pi_n\big(k_2^{-1} k_1 e^{t_1 H_0} v_{1,n} \big| v_{i,n}\big)\big(\overline{\pi_n(e^{t_2 H_0}) v_{1,n} \big| v_{i,n}}\big) = 0$$

car $\pi_n(e^{t_2 H_0}) v_{1,n} = e^{n t_2} v_{1,n}$ et pour $i = 1$, la même expression est egale à: $e^{n(t_1+t_2)}\big(\pi_n(k_2^{-1} k_1) v_{1,n} \big| v_{1,n}\big)$ Par conséquent:

$$\begin{aligned} B(\dot g_1, \dot g_2) &= \sum_n e^{n(t_1+t_2)}\big(\pi_n(k_2^{-1} k_1) v_{1,n} \big| v_{1,n}\big) \cdot (2n+\alpha) T_\Lambda(n) \\ &= \sum_n \big(\pi_n(k_1) e^{n t_1} \cdot v_{1,n} \big| \pi_n(k_2) e^{n t_2} \cdot v_{1,n}\big) \cdot (2n+\alpha) T_\Lambda(n) \\ &= \sum_n \big(\pi_n(\dot g_1) v_{1,n} \big| \pi_n(\dot g_2) v_{1,n}\big) \\ &= \sum_n (2n+\alpha) T_\Lambda(n) \big(\pi_\Lambda(\dot g_1) v_\Lambda \big| \pi_\Lambda(\dot g_2) v_\Lambda\big)^n \end{aligned}$$

(car $v_{1,n} = v_\Lambda^{\otimes n}$ et $v_{1,n}$ de norme 1).

Posons $R_1(x) = \sum_{n \geq 0} (2n+\alpha) T_\Lambda(n) x^n$. C'est une fraction rationnelle en x car ses coefficients sont des polynômes en n. (On écrit $(2n+\alpha)T_\Lambda(n)$ sous la forme $a_0 + a_1 n + a_2 n(n+1) + \cdots$ et on a donc $R(x)$ en fonction de $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ etc ...). Ceci finit la démonstration pour le noyau de Bergman.

De la même façon, le noyau de Szegö est obtenu à partir de la fraction rationelle $R_2(x) = \sum_{n \geq 0} T_\Lambda(n) x^n$ ■

Remarques finales. 1) Pour G simple, $\partial\Omega$ est strictement pseudo-convexe [**Ro**].

2) Dans le développement asymptotique de $B(\dot g, \dot g)$ il n'y a pas de terme en logarithme. Rappelons que pour un domaine borné X strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$, Ramadanov conjecture que l'absence de terme en logarithme implique que X est équivalent à la boule [**Ra**]. L'exemple de Ω montre que cette conjecture ne s'étend pas aux domaines strictement pseudo–convexes dans des espaces de Stein. (L'enveloppe d'holomorphie de Ω est le cône $\overline{G.v_\Lambda}$ (voir remarque 1).)

References

[B-O] BARTH–OTTE, Invariante holomorphe funktionen auf reduktive Liegruppen, *Math. Ann.* **201** (1973).

[Kra] KRANTZ, Function theory of several complex variables.

[Ra] RAMADANOV, A characterisation of the balls in $\mathbf{C}^n$ by means of the Bergman kernel, *Compte rendu de l'académie bulgare des sciences* **tome 34, 7** (1981).

[Ro] ROSSI, Homogeous strongly pseudo–convex surfaces, *Rice studies* **59** (1973).

[Wal] WALLACH, Harmonic analysis on homogeneous spaces.

[War] WARNER, Harmonic analysis on semi–simple Lie groups.

[We] WEIL, Variètés kähleriennes.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université d'Angers
2, Boulevard Lavoisier
49045 Angers
FRANCE

Rebut el 12 de Desembre de 1990